1. gyakorlat, szeptember 4, 6.

A (*)-gal jelölt feladatokat mindenképpen oldjuk meg gyakorlaton! A (**)-gal jelölt feladatok szerepeltek előadáson. Az (N) jelű feladatok kicsit nehezebbek. Amire nem marad idő, azokat adjuk fel házi feladatnak! Jó munkát!

I. Logikai feladatok

Az alábbi feladatokban a $\wedge$ jelöli az „ÉS”, $\vee$ a „VAGY”, $\neg$ a „negálás” műveletét.
Igazoljuk a következő azonosságokat!

1. (**) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

   Segítség: Logikai táblával lásd az első két hét anyagát.

2. (*) $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

   Segítség: Fehasználva az előzőt és a DeMorgan azonosságokat.

3. (*) $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s \equiv p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)]$

   Segítség: Felhasználva, hogy $(A \Rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$ (előadáson volt/lesz) mindkettő $\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s$

4. (*) $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q) \equiv p \Leftrightarrow q$

   Segítség: Kétszer használva a disztributivitást (lásd előadás): $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv ((\neg p \vee q) \wedge p) \vee (\neg p \vee q) \wedge \neg q)) \equiv (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q) \equiv 0 \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee 0$

5. (N) $\neg[((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow p] \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

Írjuk fel az alábbi állítások tagadását! A szöveges feladatoknál formalizáljuk az állításokat logikai műveletek és kvantorok segítségével!

1. (*) Minden ajtón van kilincs.

   Segítség: Jelölje A az ajtók, K a kilincsek halmazát, és $R(x, y)$ azt az ítéletet, hogy y rajta van x-en. E jelölésekkel formalizálva: $(\forall x \in A)(\exists y \in K)R(x, y)$, aminek tagadása: $(\exists x \in A)(\forall y \in K)\neg R(x, y)$, szavakban: van olyan ajtó, amin nincs kilincs”.

2. (*) A házban $\exists$ ablak, ami nyitva van.

   Segítség: Legyen H a ház $N(a)$: a nyitva van akkor $\exists a \in H(N(a))$. Tagadása: $\forall a \in H(\neg N(a))$ azaz minden ablak zárva van.

3. (*) A házban $\exists$ emelet, ahol $\forall$ ablak nyitva van.

   Segítség: Legyen H a ház, E az emelet $N(a)$: a nyitva van akkor $\exists E \in H(\forall a \in E(N(a)))$. Tagadása: $\forall E \in H(\exists a \in E(\neg N(a)))$ azaz minden emeleten van olyan ablak ami zárva van.

4. (*) $\forall$ emeleten $\forall$ ablak nyitva van.

   Segítség: $\forall E \in H(\forall a \in E(N(a)))$. *Tagadása:*
   $\exists E \in H(\exists a \in E(\neg N(a)))$ *azaz van olyan emelet ahol van olyan ablak ami zárva van.*

5. (*) A villamos kar bármely szak minden évfolyamán van lány hallgató.

   Segítség: Legyen V *villanykar,* S *szak,* E *évfolyam,* $L(h)$*:* h *lány akkor* $\forall S \in V(\forall E \in S(\exists h \in E(L(h))))$. *Tagadása:*
   $\exists S \in V(\exists E \in S(\forall h \in E(\neg L(h))))$ *azaz létezik olyan szak ahol létezik olyan évfolyam ahol mindenki fiú (nem lány).*

6. (*) A villamos karon létezik olyan szak, amelyiknek van olyan évfolyama, amelyben minden hallgató lány. (Hol?)

   Segítség: $\exists S \in V(\exists E \in S(\forall h \in E(L(h))))$. *Tagadása:*
   $\forall S \in V(\forall E \in S(\exists h \in E(\neg L(h))))$ *azaz minden szak minden évfolyammán van fiú.*

7. $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$ számra, ha $|x-a| < \delta$, akkor $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

II. Egyenlőtlenségek igazolása

Emlékeztetünk a harmonikus, mértani és számtani közepek közti egyenlőtlenségre (bizonyítás előadáson, kicsit később): Ha $n \geq 2$ természetes szám és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok, akkor

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket! Mikor van egyenlőség?

1. $|a+b| \leq |a| + |b|$, $a, b \in \mathbb{R}$

   Segítség:

   $$-|a| \leq a \leq |a|$$
   $$-|b| \leq b \leq |b|$$

   Összeadva a két sort: $-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$.

2. $||a| - |b|| \leq |a-b|, \quad a, b \in \mathbb{R}$

   Segítség: A fenti háromszögegyenlőtlenséget használva: $|b| + |a-b| \leq |a|$ *amiből* $|a| - |b| \leq |a-b|$ *fordított szereposztással:* $|a| - |b| \geq -|b-a| = -|a-b|$

3. (**) $(1+\frac{1}{n})^n < 4$, $n \in \mathbb{N}$

4. (**) $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}, n \in \mathbb{N}$

5. (*) $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}, \quad (n = 2, 3, \dots)$

   Segítség: A lényeg az lenne hogy nem teljes indukcióval bizonyítunk. Atrendezzük: $\frac{2^n-1}{n} > 2^{\frac{n-1}{2}}$ *és a baloldal az* $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$ *számtani közepe a jobboldal meg a mértani közepe.*

6. $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valósak,

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n$$

   Segítség: Közös nevező és aztán számtani mértani közép.

7. $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valósak,

$$a_1 a_2 \cdots a_n \leq \frac{a_1^n + a_2^n + \cdots a_n^n}{n}$$

8. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok körében! A két egyenletnek ugyanazok a megoldásai?

   (a) $2x + \sqrt{(2x-1)x^2} = x^2$

   (b) $2x - \sqrt{(2x-1)x^2} = x^2$

   Segítség: Mindkét egyenletre a

$$x^2(2x-1) = x^2(x-2)^2$$

   egyenlet jön ki. Miután kikötöttük, hogy $x \neq 0$ *(amúgy 0 megoldás!) két gyöke lesz 5 és 1. Az 5 és 0 az (a) megoldása az 1 és 0 a (b)-é.*

III. Binomiális együtthatók

1. (*) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, mert

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

2. (*) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Segítség: Teljes indukció! $n=1$ -re igaz. Tegyük fel n-re igaz, ekkor $n+1$-re:

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{k} a^{(n+1)-(k+1)} b^{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^{(n+1)-l} b^l \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}\end{aligned}$$

Felhasználva az előző feladatot kijön. Ezután fontos lenne hangsúlyozni nekik, hogy azért igaz pl. 10-re, mert ha 1-re igaz akkor 2-re is, ha 2-re akkor 3-ra is...

3. (*) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

   Segítség: Ez ugye $(1+(-1))^n$.

4. (*) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

   Segítség: Ez ugye $(1+1)^n$.

5. $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \cdots = 2^{n-1}$

   Segítség: Ez a két fölötte lévő számtani átlaga!

IV. Teljes indukció

Bizonyítsuk be a következő azonosságokat illetve egyenlőtlenségeket!

1. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. (*) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$

3. (**)

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

4. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

5.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

6. $(1+x)^n \geq 1 + nx$

7. (N) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$
8. $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$
9. $$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n$$
10. (N) $$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}$$
11. (N) $$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}},$$

    ahol a bal oldalon n darab gyökjel van.

2. gyakorlat, szeptember 11, 13.

I. Halmazalgebra
Legyenek A, B, C halmazok. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat! Felülvonás jelöli a komplementum képzést.

1. (*) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
2. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
3. (*) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$
4. $A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
5. (*) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$
6. Ha $A \subset C$, akkor $A \setminus B = A \cap (C \setminus B)$.
7. (*) $(A \setminus B) \cup B = A$ akkor és csak akkor, ha $B \subset A$.
8. (**) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$ akkor és csak akkor, ha $C = \emptyset$.
9. (*) $(A \cup B) \setminus B = A$ akkor és csak akkor, ha $A \cap B = \emptyset$.
10. Készíthető-e Venn-diagram négy körrel? Kicsit nehezebb: készíthető-e Venn-diagram tetszőleges számú halmazzal, ha bármilyen alakú alakzatokat használhatunk?
11. Adjunk meg négy olyan halmazt, amelyekre teljesül az alábbi feltételek mindegyike:
    (a) Bármely kettőnek van közös eleme.
    (b) Bármely három halmaz metszete üres halmaz.
    (c) A halmazok elemszáma egyenlő.
    (d) A halmazok elemszáma a lehető legkisebb.

II. Néhány feladat a számossággal kapcsolatban
Az alábbi feladatokban a $|A|$ jelöli A halmaz elemeinek számát. Csak véges halmazok szerepelnek még!
Bizonyítsuk be a következőket!

1. (**) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
2. (**) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

3.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

4. (*) Egy faluban 1000 ház van. Ezek közül 250-ben van autó, 900-ban hűtőszekrény, 950-ben TV, 990-ben rádió. Legalább hány házban van mind a négy eszköz?

5. Egy 33 fős tankörben háromféle idegen nyelven tanulnak. 20 diák tud angolul, 16 németül és 6 franciául. 5 diák tud pontosan két nyelven és két diák tud mindhárom nyelven. Hányan nem tudnak egyetlen idegen nyelven sem és hányan beszélnek pontosan egy idegen nyelvet?

III. Relációk, függvények

1. Injektívek illetve szürjektívek-e az alábbi hozzárendelések? Függvények-e egyáltalán?

   (a) f hozzárendeli minden emberhez az édesanyját.

   (b) g hozzárendeli minden édesanyához a legidősebb gyermekét.

   (c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto [x]$, ahol $[x]$ jelöli x egészrészét.

   (d) i minden másodfokú polinomhoz hozzárendeli a legnagyobb valós gyökét.

   (e) $j : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$.

2. (N) Az alábbi relációk közül melyek függvények?

   (a) $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és xRy pontosan akkor, ha $x|y$ (x osztója y-nak).

   (b) $R \subset P \times P$ és xRy pontosan akkor, ha $x|y$, ahol P a prímszámok halmaza.

   (c) $A = \{0, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $R_1 \subset A \times B$, és xRy pontosan akkor, ha $xy = 0$, illetve $R_2 \subset B \times A$, és xRy pontosan akkor, ha $xy = 0$.

3. Mutassuk meg, hogy az alábbi valós függvények invertálhatók és adjuk meg az inverzüket! (Deriválni még nem tudunk!)

   (a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x \neq 2$.

   (b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$, $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$.

   (d) $f(x) = x^2$, $D_f = (-\infty, -1]$.

   (e) (N) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

(f) (N)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7x-5}{3}, & \text{ha } -1 \leq x < 1 \\ \frac{2}{1+x}, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(g) (N) Mely α értéknél lesz

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & \text{ha } -1 \leq x < 0 \\ 2\alpha - x, & \text{ha } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

invertálható? Adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

III. Korlátos számhalmazok

1. Határozza meg a

$$H = \left\{ \frac{2x+2}{3x+5} \in \mathbb{R} : x \in [-1, +\infty) \right\}$$

halmaz supremumát. Van-e H-nak maximális eleme?

2. Határozza meg a

$$H = \left\{ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} : x \in (0, +\infty) \right\}$$

halmaz infimumát. Van-e H-nak minimális eleme?

3. Korlátos-e alulról, illetve felülről a H halmaz? Ha igen, adjuk meg $\sup H$-t és $\inf H$-t!

(a) $H = \left\{ \frac{x^2+1}{3x^2+2} \in \mathbb{R} : x \in [0, +\infty) \right\}$

(b) $H = \left\{ \frac{|x|-2}{|x|+2} \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $H = \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{R} : x \in (0, 1), y \in (0, x) \right\}$

(d) $H = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x-2|}{x} > x \right\}$

3. gyakorlat, szeptember 18, 20.

I. Komplex számok

1. Hozzuk algebrai alakra a következő kifejezéseket és adjuk meg az abszolút értéküket!

   (a) $\frac{2}{(1-i)(3+i)}$, $\frac{i}{(1-i)(1-2i)(1+2i)}$, $\frac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(4+3i)}$.

   (b) $(1+i)^{12}$, $(\sqrt{3}+i)^7$, $(1+i)^4(1-\sqrt{3}i)^6$, $(1/\sqrt{2}-1/\sqrt{2}i)^{-6}$.

2. Határozzuk meg az alábbi z komplex számok n-dik gyökét!

   (a) $z = 1$,$n = 3$. (b) $z = -1$, $n = 7$. (c) $z = i$, $n = 2$. (d) $z = -2+2i$, $n = 3$.

3. Az alábbi sokszögeknek komplex számokkal megadjuk néhány csúcsát. Határozzuk meg a hiányzó csúcsokat!

   (a) $z_1 = 1+4i$, $z_2 = 5+i$ csúcspontú szabályos háromszög.

   (b) $z_1 = -4+i$, $z_2 = 3-3i$ csúcspontú négyzet.

   (c) i középpontú és $z_1 = 3-4i$ csúcsú szabályos ötszög.

   (d) $z_1 = 0$, $z_2 = 1-2i$ és $z_3 = 2+3i$ csúcsú paralelogramma.

4. Határozzuk meg az alábbi egyenletek gyökeit a komplex számok körében.

   (a) $z+2-2iz-5=0$.

   (b) $z^2-(2+3i)z-1+3i=0$

   (c) $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$

   (d) $z^4+6z^2+25=0$

   (e) $z^3+2z^2-3=0$.

   (f) (N) $\overline{z} = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

II. Vektoralgebra

1. Milyen z szám esetén lesz $\mathbf{a} = (6,-2,z)$ vektor merőleges a $\mathbf{b} = (2,-3,1)$ vektorra?

2. Ha az $\mathbf{a}+3\,\mathbf{b}$ vektor merőleges a $7\,\mathbf{a}-5\,\mathbf{b}$ vektorra, az $\mathbf{a}-4\,\mathbf{b}$ pedig merőleges a $7\,\mathbf{a}-2\,\mathbf{b}$ vektorra, akkor mekkora az $\mathbf{a}$ illetve $\mathbf{b}$ által bezárt szögek koszinusza?

3. Legyen $|\,\mathbf{a}\,| = 2$, $|\,\mathbf{b}\,| = 5$ és a két vektor szöge 120 fok. A t paraméter mely értékeire lesz merőleges $t\,\mathbf{a} + 17\,\mathbf{b}$ és $3\,\mathbf{a} - \mathbf{b}$?

4. Legyen $\mathbf{a} = (1, 0, 1), \mathbf{b} = (1, 2, 2), \mathbf{c} = (-1, 2, 1)$. Mi lesz a $\mathbf{c}$ vektor $\mathbf{a}$ illetve $\mathbf{b}$ vektorok egyenesére vett merőleges vetülete és mi az az összegük?

5. Legyen $\mathbf{a} = (7, -1, 0), \mathbf{b} = (3, -4, 5), \mathbf{c} = (4, 3, 5)$. Melyik $\mathbf{x}$ egységvektor zár be mindhárom vektorral ugyanolyan szöget?

6. Legyen $\mathbf{a} = (1, 0, 1), \mathbf{b} = (1, 2, 2), \mathbf{c} = (-1, 2, 1)$. Számoljuk ki a vektoriális szorzatukat!

4. gyakorlat, szeptember 25, 27.

I. Analitikus térgeometria, egyenesek és síkok megadása

1. (*) Egy tetraéder csúcsai: $A(2,-4,3)$, $B(1,-4,4)$, $C(-3,2,0)$ és $D(2,0,t)$. t milyen értékére lesz a tetraéder térfogata 4 egység?

2. Igazoljuk, hogy a $2x+y-z-2=0$, $x-3y+z+1=0$, $x+y+z-3=0$ síkok egyetlen pontban metszik egymást.

3. Írjuk fel a következő egyenesek paraméteres és paraméter nélküli egyenletrendszerét!

   (a) (*) Átmegy a $P(2,-3,4)$ és a $Q(2,4,6)$ pontokon.

   (b) Merőleges az $\mathbf{a}=(-2,3,1)$ és a $\mathbf{b}=(2,0,1)$ vektorra és átmegy az $A(6,-3,4)$ ponton.

   (c) Párhuzamos az $x-y-4z=0$ és a $2x+y-2z-4=0$ síkok metszésvonalával és átmegy az origón.

   (d) (*) Párhuzamos a $3x+y-z+1=0$ és az $x+y+z=0$ síkkal és az yz síkot a $P(0,4,1)$ pontban metszi.

   (e) Átmegy a $P(-1,2,-3)$ ponton, merőleges az $\mathbf{a}=(6,-2,-3)$ vektorra és metszi az $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{3-z}{5}$ egyenest.

   (f) (*) Az $x-3y+z+2=0$ és a $2x-5y-z+4=0$ síkok metszésvonala.

4. Írjuk fel a következő síkok egyenletét!

   (a) (*) Átmegy a $P(-2,1,0)$ ponton és illeszkedik az $e: x=t+2, y=3t, z=2$ egyenesre.

   (b) (*) Átmegy a $P(3,0,1)$ ponton és párhuzamos az $e: x=1-2t, y=2+t, z=-2t$ és az $f: \frac{x+2}{2}=y=-z$ egyenesekkel.

   (c) Illeszkedik az $\frac{x-5}{3}=y-1=z$ egyenesre és merőleges $2x-y+z=0$ síkra.

   (d) Párhuzamos az $x=2y=3z$ egyenessel és áthalad az $x+y+z=0$ és a $2x-y+3z=0$ síkok metszésvonalán.

   (e) Átmegy a $P(1,2,3)$, a $Q(-1,-5,2)$ és az $R(,0,0,-3)$ pontokon.

II. Távolságok és szögek

1. (*) Adjuk meg azokat a pontokat melyek rajta vannak az $e : \frac{x-1}{2} = -y = \frac{z+3}{3}$ egyenesen és 2 egység távolságra vannak az $2x - 2y + z - 1 = 0$ síktól!
2. (*) Mekkora a $2x - 4y + 2z - 1 = 0$ és az $x - 2y + z - 1 = 0$ síkok távolsága?
3. Határozzuk meg a z tengelyen azt a pontot, amely egyenlő távolságra van $12x + 9y - 20z + 19 = 0$ és a $16x - 12y + 15z - 9 = 0$ síkoktól!
4. Határozzuk meg a $P(-2, 3, 7)$ pont távolságát a $\frac{x-1}{3} = 2 - y, z = 2$ egyenestől!
5. Határozzuk meg az $x + y + z - 2 = 0$ és az $x + 2y - z - 1 = 0$ síkok metszésvonalán azt a pontot, amely egyenlő távol van az $x + 2y + z + 1 = 0$ és az $x + 2y + z - 3 = 0$ síkoktól!
6. Melyek azok a síkok, melyek az $x = 1, y = 3 + 3t, z = 4 + 4t$ egyenesre illeszkednek, egységnyi távolságra vannak a $P(2, 1, 3)$ ponttól? Adjuk meg a hajlásszögük cosinusát!
7. Írjuk fel azon síkok egyenletét, melyek átmennek a $P(1, 1, 1)$ ponton, párhuzamosak az $x + 2y - z - 1 = 0$, $2x - y + z - 1 = 0$ síkok metszésvonalával és mindkét síkkal ugyanakkora szöget zárnak be. Mi lesz ezen szög cosinusa?

III. Numerikus sorozatok

Definíció alapján bizonyítsuk be, hogy

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{n^2+1}) = 0.$
2. (*) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n-\sqrt{n}-1}{n+\sqrt{n}+1}) = 1.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0.$
4. (*) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}) = +\infty.$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{5n^3+2n^2-1}{2n^3+n+1}) = \frac{5}{2}.$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2-3n^2}{n+1}) = -\infty.$

5. gyakorlat, október 4, 9.

Numerikus sorozatok II.

1. Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha igen, mi a határértékük?

   (a) $a_n = \frac{5-2n^5}{3n^5+n^4-2n^3+2}$, $\quad b_n = \frac{3n^5-7\cdot 10^{23}n^3}{10^{-38}n^6-67n^2+9n}$, $\quad c_n = \frac{-n^7+n^6-3}{n^5-n^2+4}$

   (b) $a_n = \frac{(3n+1)^4}{2n^4+n^2-n+5}$, $\quad b_n = \frac{(2n^3+3)^2}{(3n+6)^6}$

   (c) $a_n = \frac{(n+1)!}{(3-2n)n!}$, $\quad b_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$, $\quad c_n = \frac{\binom{2n}{4}}{\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{2}}$

   (d) $a_n = \sqrt{n^4+2n^2+3} - \sqrt{n^4+n}$, $\quad b_n = \sqrt[3]{n^3-3n+8} - \sqrt[3]{n^3+n+1}$, $\quad c_n = \frac{1}{n-\sqrt{n^2+3n+5}}$

   (e) $a_n = \frac{3^{2n}}{(-3)^n+10^n}$, $\quad b_n = \frac{3^{2n}}{3^n+9^n}$, $\quad c_n = \frac{9^n}{3^n+2^n}$

   (f) $a_n = \frac{4^{n-1}+n^5 3^{n+2}}{2^{2n+3}+2^{n-2}}$, $\quad b_n = \frac{n^3 2^n+3^n}{2^{2n}-3n^2}$

   (g) $a_n = \sqrt[3n]{3n}$, $\quad b_n = \sqrt[n]{3n}$, $\quad c_n = \sqrt[3n]{n}$, $\quad d_n = \sqrt[5n]{3n}$

   (h) $a_n = \sqrt[n]{2n^3+3}$, $\quad b_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2+6}{3n^2+2n}}$, $\quad c_n = \sqrt[n]{\frac{5n^2+4n-5}{n^3+6n^2-n}}$.

2. Konvergensek-e az alábbi sorozatok?

   (a) $a_n = \sqrt[n]{3^n+2^n}$

   (b) $a_n = \sqrt[n]{3^n-2^n}$

   (c) $a_n = n^2(n-\sqrt{n^2+1})$

   (d) $a_n = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}+2^n}$

   (e) $a_n = \frac{n^3 2^{2n}}{3^{n+1}(2+1/n)^n}$

6. gyakorlat, október 20.

Numerikus sorozatok III.

1. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

   (a) $a_n = (\frac{3n-1}{3n+2})^{2n}$

   (b) $a_n = (\frac{n-2}{n})^{n^2}$

   (c) $a_n = (2 - \frac{1}{n})^n$

   (d) $a_n = (\frac{2^n+3}{2^n+1})^n$

   (e) $a_n = (\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1})^n$

   (f) $a_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$

   (g) $a_n = (\frac{n^2-2n+1}{n^2-2n+4})^{3n^2-6n+5} + \frac{\sqrt{n^4-n^2+6}-\sqrt{2n^3+n-1}}{n^2+1}$

   (h) $a_n = n^2(\sqrt{3n^4+2n-1} - \sqrt{3n^4+n^2-n})(\frac{-3n+1}{3n+4})^{4n-2}$

   (i) $a_n = (\frac{(n+3)!}{n!n^3})^{n-1}$

   (j) $a_n = (\frac{4n+3}{5n})^{5n^2}$

   (k) $a_n = n^2 \sin \frac{5}{n^2+1}$

   (l) (N) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} n(e^{1/n} - 1) = 1$.

   (m) (N) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} n \ln(1 + 1/n) = 1$

2. Rekurzív sorozatok határértéke.

   (a) $a_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha \in [0,1], \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2+\alpha}{2}$

   (b) Mikor konvergens?
   $a_1 = \sqrt{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{\alpha + a_n}$

   (c) Mikor konvergens?
   $a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{2\alpha a_n + \alpha}{a_n + \alpha}$

   (d) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^3+1}$

3. Keressük meg a sorozatok lim inf-jét és lim sup-ját!

   (a) $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$

   (b) $a_n 1 + (-1)^n + \frac{n+2}{n+1}$

   (c) $a_n = \sqrt{n^2 + (-1)^n n^2}$

7. gyakorlat, október 11, 16.

Függvény határértéke

1. Bizonyítsuk be definíció alapján a következőket!

   (a) $\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}$

   (b) $\lim_{x\to 4} \frac{x^{-}16}{x^2-4x} = 2$

   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}$

   (d) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = \infty$

2. Számoljuk ki a határértékeket!

   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

   (b) $\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x)$

   (c) $\lim_{x\to 1}(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-2})$

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-1-5x}{x^2+x^5}$

   (e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

   (f) $\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$

   (g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$

   (h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

   (i) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} + x)$

   (j) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x})$

3. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket! (Szakadási helyek vizsgálata.)

   (a) $f(x) = \frac{3(1-x^2)+|1-x^2|}{2(1-x^2)-|1-x^2|}$

   (b) $f(x) = 3 + \frac{1}{1+3^{\frac{1}{1-x}}}$

   (c) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$

   (d) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2(x-3)^2}$

   (e) $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$

4. Határozzuk meg, ha lehetséges, a paramétereket úgy, hogy a függvény mindenütt folytonos legyen!

(a)

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{ha } x \geq 0, \\ -x & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{ha } x \leq 0, \\ ax + b & \text{ha } 0 < x < 1, \\ \sqrt{x} & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } |x| \leq 1, \\ x^2 + ax + b & \text{ha } |x| > 1. \end{cases}$$

8. gyakorlat, október 18, 30.

Korlátos zárt halmazon folytonos függvények

1. Van-e megoldása az $x^5 - 18x + 2 = 0$ egyenletnek $[-1, 1]$-ben?
2. Felveszi-e az $f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin \pi x + 3$ függvény a $7/3$ értéket a $[-2, 2]$ intervallumon?
3. Legyen f a $[0, 1]$ intervallumon folytonos függvény, melyre $f(0) = f(1) = 0$. Mutassuk meg, hogy bármely $0 < d \leq 1$ számhoz megadható a függvény grafikonjának olyan húrja, amely d hosszúságú.
4. Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = \frac{x^3-1}{5x-5}$ függvény a $[-4, 1)$ intervallumon?

Trigonometrikus, hiperbolikus függvények és inverzeik

1. Számolja ki az alábbi határértékeket!
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}}{\sin x}$
   (b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right)$
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
   (d) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 3\pi x}$
   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin ax}{x}$
   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{\operatorname{arctg} bx}$
   (g) $\lim_{x\to \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$
   (h) $\lim_{x\to 1} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{1-x}$
   (i) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} bx}$
   (j) $\operatorname{arctg} \frac{x+1}{1-x}$
2. Igazoljuk, hogy
   (a) $\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y$
   (b) $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{sh} y$

9. gyakorlat, október 25, november 6.

Deriválás

1. Az értelmezési tartományuk mely pontjaiban deriválhatóak az alábbi függvények! Számoljuk ki a deriváltakat!

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2}$

   (b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

   (c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

   (d)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

2. Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy az
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq x_0 \\ ax+b, & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$
   differenciálható legyen x_0-ban!

Érintőegyenessel kapcsolatos feladatok (*)

1. Adjuk meg az alábbi függvények x_0-beli érintőegyenesének egyenletét! (*)

   (a) $f(x) = \sin\sqrt{x}, \quad x_0 = \pi^2$

   (b) $f(x) = x^3 - 8x, \quad x_0 = 3$

   (c) $f(x) = e^{\sin x}, \quad x_0 = \pi.$

2. Adjuk meg az alábbi síkgörbék adott P pontbeli érintőegyenesének egyenletét! (*)

   (a) $x^3 + y^3 - 6xy = 0, \quad P(3,3)$

   (b) $y = \sin(x+y), \quad P(\pi, 0)$

   (c) $y^2 = 4x - x^2, \quad P(2,-2)$

3. Milyen összefüggés áll fenn a, b és c között, ha az $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabola érinti az x tengelyt?

4. Igazoljuk, hogy ha az $f(x) = x^3 + px + q$ függvény érinti az x tengelyt, akkor $(p/3)^3 + (q/2)^2 = 0$!

5. Irjuk fel annak az egyenesnek a képletét, mely átmegy az origón és érinti az $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$ görbét!

6. Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m^2}{|x|}, & \text{ha } |x| > c \\ ax^2 + b, & \text{ha } |x| \le c \end{cases}$$

görbe mindenütt folytonos legyen és minden pontjában rendelkezzen érintővel!

Deriválás gyakorlása, logaritmikus deriválás (*)

1. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltjait, ahol léteznek!

(a) $f(x) = 2^{\arctan x^2}$

(b) $f(x) = x^x + x^{x^x}, \quad x > 0$

(c) $f(x) = \ln(\ln(\ln x)), \quad x > e$

(d) $f(x) = \frac{(x+3)^4 e^{x^3} \cos \arctan x}{\sin^2 x^7 \ln(2x+2)^4}$

(e) $f(x) = \arctan \frac{2x}{1+x^2} \arcsin \sqrt{1-x^2}$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{(x-2)(x^2+2)(x+3)}}$

2. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy differenciálható függvény, $g(x) = \sin^2 x$ és $h(x) = \cos^2 x$. Határozzuk meg az $F = (f \circ g) + (g \circ h)$ függvény deriváltját.

3. Irjuk fel zárt alakban!

(a) $F(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}, \quad n \ge 2$

(b) $G(x) = 1 + 2^2 x + \ldots n^2 x^{n-1}, \quad n \ge 2$
(Megjegyzés: vegyük észre, hogy $G(x) = (xF(x))'$)

Magasabbrendű deriváltak

(a) $(\sin(3x+1))^{(4)} =$

(b) $(\frac{1}{1-x})^{(5)} =$

(c) $(x^2 e^x)^{(100)} =$

10. gyakorlat, november 8, 13.

1. **Középértéktételek**

   (a) Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^7 + 14x - 3$ polinomnak pontosan egy zérushelye van!

   (b) Bizonyítsuk be, hogy $f(x) = x^n + ax + b$ valós függvénynek legfeljebb két zérushelye van, ha n páros és legfeljebb három, ha n páratlan.

   (c) Legyen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

   $$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

   Bizonyítsuk be, hogy f'-nek végtelen sok zérushelye van!

   (d) Bizonyítsuk, be, hogy $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$!

   (e) Bizonyítsuk be, hogy $|\tan x + \tan y| \geq |x + y|$, ha $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$!

2. **l'Hospital-szabály**

   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$,

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{\ln(1+x)}$

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

   (d) $\lim_{x\to \infty} \frac{xe^{x/2}}{e^x+x}$

   (e) $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x^2}{\sqrt{x}}$

   (f) $\lim_{x\to 0+} x \ln \sin x$

   (g) $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1+\ln \sin x}$

   (h) $\lim_{x\to 0}(\arcsin x)(\cot x)$

   (i) $\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x$

   (j) $\lim_{x\to 0}(1/x - 1/(e^x - 1))$

   (k) $\lim_{x\to 1}(1/\ln x - 1/(x - 1))$

   (l) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{\sin x}$

   (m) $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$

   (n) $\lim_{x\to 0+}(1 + x)^{\ln x}$

11. gyakorlat, november 15, 20.

1. **Végezzünk teljes függvényvizsgálatot!**
   (a) $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$
   (b) $f(x) = x - 2\arctan\frac{x}{x+1}$
   (c) $f(x) = x^2 e^{1/x}$
   (d) $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$
   (e) $f(x) = x^2\sqrt{1 - x}$
   (f) $f(x) = x^2 \ln x^2$
   (g) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
2. **Szélsőértékek meghatározása**
   (a) Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$ abszolút szélsőértékeit a $[-6, 6]$ intervallumon!
   (b) Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \ln x$ abszolút szélsőértékeit az $[1, e]$ intervallumon!
   (c) Határozzuk meg az $f(x) = xe^{-x}$ szélsőértékeit az $[1/2, \infty]$ intervallumon!
   (d) Határozzuk meg a $[0, 1]$ intervallumon az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = x^3$ függvények távolságát!
   (e) Adott térfogatú egyenes hengerek közül melyiknek a legkisebb a felszíne?
   (f) Határozzuk meg az $A(2, 0)$ pont és az $x^2 + y^2 = 1$ körvonal pontjai közötti legnagyobb és legkisebb távolságot!
   (g) Bizonyítsuk be, hogy minden valós x esetén
   $$\frac{2}{3} \le \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \le 2.$$
3. **Taylor-formula (*)**
   (a) Számítsuk ki $\cos 0,2$-t 3 tizedesjegy pontossággal!
   (b) Adjuk meg $\sqrt{102}$-t 2 tizedesjegy pontossággal!
   (c) Adjuk meg $e^{0,1}$-t 3 tizedesjegy pontossággal!
   (d) Bizonyítsuk be, hogy ha $x > 0$, akkor $\sinh x > x + x^3/3$!
   (e) Irjuk fel $\sin x$ $x_0 = \pi/6$-hoz tartozó 3-ad fokú Taylor-polinomját és írjuk fel a maradéktagot!

4. **Egyszerűbb határozatlan integrálok(*)**

(a) $\int \frac{3x}{(2+3x^2)^3}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{2+3x^2}$

(e) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5}$

(f) $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{3x^2+6x+5}$

(g) $\int \frac{\sin \ln x}{x}\,\mathrm{d}\,x$

(h) $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}\,x$

(i) $\int \sin^2 x \cos^3 x\,\mathrm{d}\,x$

12. gyakorlat, november 22, 27.

1. **Parciális integrálás (*)**

   (a) $\int x^2 \sin 2x \, \mathrm{d}\, x$

   (b) $\int e^x \sin^2 x \, \mathrm{d}\, x$

   (c) $\int x^2 e^{-2x} \, \mathrm{d}\, x$

   (d) $\int x \arctan x \, \mathrm{d}\, x$

   (e) $\int \arcsin x \, \mathrm{d}\, x$

   (f) $\int \ln^3 x \, \mathrm{d}\, x$

   (g) $\int x \sinh x \, \mathrm{d}\, x$

   (h) $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}\, x$

   (i) $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}$

2. **Helyettesítéses integrálás (*)**

   (a) $\int \sqrt{5+3x^2} \, \mathrm{d}\, x$

   (b) $\int \sqrt{(x^2-1)^3} \, \mathrm{d}\, x$

   (c) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} \, \mathrm{d}\, x$

   (d) $\int \sqrt{3-2x-x^2} \, \mathrm{d}\, x$

   (e) $\int \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

   (f) $\int \frac{\mathrm{d}\, x}{x^2+x}$

   (g) $\int \frac{\mathrm{d}\, x}{\sin x+\cos x}$

3. **Racionális törtfüggvények, illetve arra vezető helyettesítések (*)**

   (a) $\int \frac{1}{x^2-2x+3} \, \mathrm{d}\, x$

   (b) $\int \frac{1}{x^4-x^2} \, \mathrm{d}\, x$

   (c) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} \, \mathrm{d}\, x$

   (d) $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} \, \mathrm{d}\, x$

   (e) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} \, \mathrm{d}\, x$

   (f) $\int \frac{6 \, \mathrm{d}\, x}{e^x-3}$

(g) $\int \frac{4\,\mathrm{d}\,x}{e^{2x}-4}$

(h) $\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}$

(i) $\int x\sqrt{5x+3}\;\mathrm{d}\,x$

13. gyakorlat, november 29, december 4.

1. **Határozott integrál (*)**
   Határozzuk meg az alábbi görbék által bezárt korlátos térrész területét!

   (a) $y = x^2, y = 1 - x^2$

   (b) $y = \frac{4}{3x}, y = \frac{13}{3} - x$

   (c) $y^2 = x + 3, x = \frac{x}{2}$

   (d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, x + y = 1$

   (e) $y = \ln x, y = \ln^2 x$

   Határozzuk meg az alábbi egyenletű görbék megadott intervallumhoz tartozó ív-hosszát!

   $$(s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ \mathrm{d}\,x)$$

   (a) $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, $[0, 2]$-n

   (b) $y = \ln x$, $[\sqrt{3}, \sqrt{8}]$-n

   (c) $y = x^{3/2}$, $[0, 4]$-n

   Határozzuk meg az alábbi görbék x tengely körüli megforgatásával kapott forgástestek térfogatát, a megadott intervallum végpontjaiba állított x tengelyre merőleges síkok között!

   $$(V = \pi \int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}\,x)$$

   (a) $y = \cos^2 x$, $[0, \pi]$

   (b) $y = \ln x$, $[1, 3]$

   (c) $y = \sqrt{1 + x^2}$, $[0, 3]$