

- 1 Egy elektromos hálózatba 100 db, egyenként 500 W-os fogyasztó kapcsolható. Tegyük fel, hogy a fogyasztókat egymástól függetlenül üzemeltetik, és mindegyikre 0,6 annak a valószínűsége, hogy egy adott pillanatban üzemel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott pillanatban a hálózat igénybevétele legalább 28000 W? Közelítsünk valamelyik alkalmas más eloszlással is.
- 2 Egy busz tervezésekor tudják, hogy az utasok tömegének eloszlása olyan valószínűségi változó, amelynek várható értéke 70 kg, a szórása 10 kg. Milyen teherbírásra tervezzék a járművet, ha egyszerre legfeljebb 150 utas használhatja, és az a cél, hogy a túlsúly valószínűsége 0,005-nál kisebb legyen?
- 3 A Lángoló Rózsa kolostorban az apácák a **Szent Péter Imalánc**-ban vesznek részt. Minden nap 5-től 7-ig a kolostor apácái imádkoznak Szent Péterhez (előtte és utána egy másik kolostor imádkozik, 7-kor szól nekik a vekker, hogy abba lehet hagyni). Ha egy ima hossza átlagosan 0,5 perc és szórása 0,2 perc akkor mi a valószínűsége hogy legfeljebb 225-ször imádkoznak?
- 4 A gyűrűsféreg gyűrűinek hosszáról tudjuk, hogy azonos eloszlásúak, várható értékük 3 mm, szórásuk 0,5 mm. Mi a valószínűsége, hogy egy 30 gyűrűből álló gyűrűsféreg hossza meghaladja a 95 milimétert?
- 5 A sík következő koordinátájú pontjaiból kaphatunk rádióüzeneteket, a megadott valószínűségekkel. Készítsen rajzot hozzá!

$X \setminus Y$	0	0.5	4
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

- a) Adjuk meg az X és Y koordináták eloszlását!
 - b) Függetlenek-e a koordináták?
- 6 A (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó együttes valószínűség-eloszlását a tartalmazza a következő táblázat:

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

- a) Adja meg az együttes eloszlásfüggvényt!
 - b) Adja meg a két változó kovarianciáját!
- 7 Egy dobozban 30 darab 6 wattos, 30 darab 9 wattos és 40 darab 14 wattos LED égő van. Kiveszünk egyenletesen, visszatevés nélkül 20 villanykörtét. Jelentse ξ a mintában szereplő 6 wattos égők számát, η pedig a 9 wattos égők számát!

- a) Írjuk fel a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó valószínűség-eloszlását!
- b) Számítsuk ki ξ peremeloszlását!

Ez nagy jó feladat arra, hogy van dszkrét együttes eloszlás képlettel is megadva. A b) feladatot nyilván számoljuk ki „csak úgy” (nem kell összegezni)

- 8 A (ξ, η) lehetséges értékeit és együttes valószínűség-eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza.

$\xi \setminus \eta$	0	1
0	p	p
1	p	$3p$
2	$2p$	$4p$

- a) Adja meg a p paraméter értékét!
- b) Számítsuk ki a következő valószínűségeket: $P(\xi = i, \eta = 0)$ ahol $(i = 0, 1, 2)$; $P(\xi < 2 | \eta = 0)$; $P(\xi \geq 1 | \eta = 1)$; $P(\eta = 1 | \xi \geq 1)$!
- c) Írja fel $\mathbb{E}(\eta | \xi)$ eloszlását!

9 Az (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó együttes valószínűség-eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.

$\xi \setminus \eta$	1	0	2
-1	p	q	p
1	q	p	q

Határozza meg p és q paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy a valószínűségi változók korrelálatlanok! Függetlenek-e a változók?

10 Két valószínűségi változó együttes valószínűség-eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.

$X \setminus Y$	0	1
-1	$\frac{1}{4} - \varepsilon$	$\frac{1}{4} + \varepsilon$
0	$\frac{1}{4} + \varepsilon$	$\frac{1}{4} - \varepsilon$

- a) Milyen értékeket vehet fel ε ?
- b) Írja fel az együttes eloszlásfüggvényt, ha $\varepsilon = 1/8$.
- c) Függetlenek-e a változók (a fenti esetben)?

11 Határozzuk meg, hogy az A paraméter milyen értéke mellett lehet az $f(x, y) = x^2 + Ay^2$ függvény a $(0 < x < 1, 0 < y < 2)$ tartományban egy két-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

- a) Írjuk fel a perem sűrűségfüggvényeket!
- b) Határozza meg az $\mathbb{E}(X|Y = y)$ feltételes várható értéket!

12 Legyen a ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{48}{41} \left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), & \text{ha } 0 < x < 1; x < y < 2 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

- a) Mutassuk meg, hogy ez valóban sűrűségfüggvény!
- b) Írjuk fel az együttes eloszlásfüggvényüket és perem-eloszlásfüggvényeket!
- c) Adjuk meg a $P(\xi \geq 0.5, \eta < 1)$ valószínűséget!
- d) Függetlenek-e a valószínűségi változók?

13 Adja meg az X valószínűségi változó perem eloszlásfüggvényét, ha az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye adott: $f(x, y) = \frac{y^3 + y}{6} e^{1-x}$ ha $1 < x$ és $0 < y < 2$ különben 0!

14 Adott két független, örökifjú tulajdonságú valószínűségi változó. Az egyik várható értéke 2, a másiké 4. Írja fel az együttes sűrűségfüggvényüket!

15 Mi lesz a ξ valószínűségi változó saját magával vett kovarianciája, korrelációs együtthatója?

16 Az X_1, X_2 , valószínűségi változókról tudjuk, hogy a korrelációs együtthatójuk 0,5. Mennyi lesz a $2X_1$ és $3X_2$ valószínűségi változók korrelációs együtthatója?

17 Ha minden nő nála 5 évvel idősebb férfihez menne feleségül, akkor mennyi lenne a férjek és a feleségek életkora közötti korreláció értéke?

18 Mi lesz a ξ és η valószínűségi változók korrelációs együtthatója, ha $\eta = a\xi + b$?

Házi Feladatok

19 Superman edzésprogramjában a napi felületeinek számának várható értéke 150 000, szórása 50 000. Mi a valószínűsége annak, hogy áprilisban 5 milliónál több felületet végez? Milyen feltételezéseket kell tenni?

20 ξ és η együttes valószínűség-eloszlását a következő táblázat tartalmazza. Írja fel $\mathbb{E}(\eta|\xi)$ eloszlását!

$\eta \setminus \xi$	1	2	3
1	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{2}{12}$
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
3	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

- 21 Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékeit a $(0, 0)$; $(0, 4)$; $(4, 0)$; $(4, 4)$ pontok által meghatározott négyzet belsejében levő egész koordinátájú pontok alkotják. Az (X, Y) bármelyik értékét egyenlő valószínűséggel veszi fel a négyzet középpontja kivételével, amely négyszer akkora valószínűséggel következik be, mint a többi. Számítsuk ki X és Y korrelációs együtthatóját, és állapítsa meg, független-e ez a két valószínűségi változó.
- 22 A ξ valószínűségi változó jelentse egy kémiai anyag felületi feszültségét, η a savasságát. A skálázást úgy végezzük, hogy ξ 0 és 2 között, η 2 és 4 között vesz fel értékeket. A valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda(6 - x - y), & \text{ha } 0 \leq x \leq 2 \text{ és } 2 < y < 4 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

- Határozza meg a λ paraméter értékét.
- Adja meg a feltételes sűrűségfüggvényt.
- Függetlenek-e a valószínűségi változók?

Megoldás: <http://math.bme.hu/~nagy/vegyeszA3c/>