MAT B1 – I. vizsga – 2001. jan. 4. Név: ______________________________ Gyakvez.: __________

1. Igazságtáblával igazoljuk a $a \Rightarrow b \equiv \neg(a \wedge \neg b)$ azonosságot! *(2 pont)*

2. Definiálja vektorok skaláris szorzatának fogalmát! *(2 pont)*

3. Írja le a binomiális együtthatók szimmetria és additív tulajdonságait! *(2 pont)*

4. Vezessük le az $\ln$ függvény deriváltjának ismeretében az $\exp : x \mapsto e^x$ függvény deriváltjára vonatkozó képletet! *(3 pont)*

5. A $\cos$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomja a maradéktaggal: *(3 pont)*

6. Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van az a pont egy teljes K környezetében. Az alábbi mondatok kiegészítésével adjunk meghatározásokat arra, hogy az „f függvény folytonos az a pontban”. *(4 pont)*

a) Minden $\varepsilon > 0$ valóshoz van olyan $\delta > 0$ valós, hogy ha $x \in K$, és $|x - a| < \dots$
akkor ...

b) Létezik az f bal és jobb oldali határértéke is az a-ban és a két határérték ...

c) Bármely K-beli, a-hoz tartó $[x_n]$ sorozatra igaz, hogy ...

7. Egészítsük ki az alábbi állításokat úgy, hogy igazak legyenek. *(8 pont)*

a) Ha az egyváltozós valós f függvény 4-szer folytonosan differenciálható az x_0 egy teljes környezetében, $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ és $f^{(4)} < 0$, akkor f-nek az x_0-ban ...

b) *L'Hospital szabály.* Legyen értelmezve az egyváltozós valós f és g függvény az a pont egy jobboldali K környezetében, és ugyanitt legyen differenciálható is úgy, hogy $x \in K$ esetén ...

Ha $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$, továbbá létezik a ...

c) *Összetett függvény deriválási szabálya:* Legyenek f és g egyváltozós valós függvények. Ha g differenciálható az ...

pontban és f a ...

pontban, akkor $f \circ g$ is differenciálható az x_0 pontban és ...

d) *A differenciálhatóság definíciójának törtmentes alakja:* Azt mondjuk, hogy a g függvény differenciálható az a helyen, ha megadható a-nak egy olyan E teljes környezete, valamint megadható egy olyan ...

8. Igazak-e az alábbi állítások? Írjunk I vagy N betűt a négyzetbe, és igazolásképpen I válasz esetén adjunk egy nagyon rövid indoklást, ha az állítás egy tanult tétellel azonos, akkor elég annyit írni, hogy „TÉTEL”, N válasz esetén adjunk egy példát. *(6 pont)*

a) Minden $[0, 1]$-n értelmezett valós függvény korlátos. ☐

b) Minden $[0, 1]$-n értelmezett folytonos valós függvény korlátos. ☐

c) Minden $[0, 1]$-n értelmezett differenciálható valós függvény korlátos. ☐

9. *Változó felső határú integrál.* Ha az egyváltozós valós f függvény . . .

az $[a, b]$ intervallumon, akkor az

$$I(x) := \int_{\dots}^{\dots} \dots$$

függvény értelmezve van az $[a, b]$ intervallumon, az (a, b) intervallumon pedig . . .

továbbá igaz a . . .

összefüggés. *(2 pont)*

10. Számítsuk ki az alábbi integrálokat! *(3+3+3 pont)*

a) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x} + \cos \pi x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int x \ln x \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$

11. Legyen az $[a_n]$ valós számsorozat monoton növekvő, felülről korlátos; legkisebb felső korlátját jelölje s. Mutassuk meg, hogy az $[a_n]$ sorozatnak van határértéke, és $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. *(5 pont)*

Bizonyítás: Ehhez be kell látni, hogy $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}$ szám, hogy . . .

12. Döntsük el, hogy abszolút vagy feltételesen konvergensek az alábbi sorok! *(3+3 pont)*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

13. Bizonyítsuk be, hogy ha az egyváltozós valós f függvény az a pontban differenciálható, és a egy K környezetének minden x pontjára $f(x) \le f(a)$, akkor $f'(a) = 0$. *(5 pont)*

14. Az alábbi ábrán látható f függvénynek az A, B vagy C ábrán látható függvény lehet a deriváltja? A hibás rajzokon jelöljük meg egy X betűvel a grafikonnak azt az ágát, mely mindenképpen hibás. $\boxed{}$ *(3 pont)*