

- Legyen a  $P(H)$  hatványhalmazon az összeadás a szimmetrikus differencia:  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ , és a szorzás a metszet. Melyik testaxiómák nem teljesülnek erre a két műveletre?
- Bizonyítsuk be, hogy egy testben
  - $(-a)b = a(-b) = -(ab)$
  - $\frac{1/a}{1/b} = \frac{b}{a}$
- Bizonyítsuk be, hogy
  - a  $K = \{0, 1\}$  halmaz az  $1 + 1 = 0$  szabállyal, de a többi esetben a szokásos szorzással és összeadással (2 szerinti maradékokkal számolunk), testet alkot;
  - Ha  $K$  egy páros elemszámú véges test, akkor  $a + a = 0$  minden  $a \in K$ -ra.
- Legyen  $K$  test, és jelöljük ki benne egy  $P \subseteq K \setminus \{0\}$  részhalmazt (pozitív elemek halmaza), amelyre
  - $\forall a \neq 0$ -ra  $a$  és  $-a$  közül pontosan az egyik van  $P$ -ben;
  - $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$ ;
  - $a, b \in P \Rightarrow a \cdot b \in P$ .
 Bizonyítsuk be, hogy  $K$  rendezett test az  $a < b \Leftrightarrow b - a \in P$  rendezéssel!
- Melyik alulról, ill. felülről korlátos, melyiknek van infimuma, ill. szuprimuma, legkisebb, ill. legnagyobb eleme az alábbi halmazok közül  $\mathbb{R}$ -ben, illetve a d) kivételével  $\mathbb{Q}$ -ban?
  - $\{0, 0, 1, 0, 11, 0, 111, \dots\}$
  - $(1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$
  - $\mathbb{N}$
  - $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$  értelmezési tartománya
- Adjuk meg az alábbi komplex számok kanonikus (algebrai) alakját:
  - $z = (3 - 4i)(7 + 8i)$ ;
  - $z = \frac{3 - 4i}{2 - i}$ ;
  - $z = i^{87}$ ;
  - $z = (1 + i)^9$ .
- Legyen  $z = 1 + 3i$  és  $u = 2 - i$ . Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:
  - $z\bar{z}$
  - $u/\bar{u}$
  - $|z - u|$
  - $|2z - zu|$
  - $|u/z\bar{u}^3|$ .
- Mi a mértani helye a síkon azoknak a pontoknak, amelyeknek megfelelő  $z$  komplex számokra:
  - $|z - 5 + i| = 2$
  - $|z - i| = |z + i|$
  - $|z| = 3iz$
  - $z + \bar{z} < 4$
  - $2z + 5 = 2\bar{z}$
  - $\left| \frac{z - 3 + 4i}{z - i} \right| \geq 1$
- Számítsuk ki a  $16 - 30i$  és a  $4 + 2i$  komplex szám négyzetgyökeit algebrai alakban!
- Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:
  - $z^2 - 6z + 13 = 0$ ;
  - $|z| - z = 1 + 2i$ ;
  - $z^2 + 2iz - 1 + i = 0$ .
- Írjuk fel az alábbi számok trigonometrikus alakját!
  - $1 + i\sqrt{3}$
  - $-4i$
  - $\sqrt{6} - i\sqrt{2}$
  - $3 + i$
- Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét!
  - $(1 + i\sqrt{3})^3$
  - $\sqrt{\sqrt{3} + i}$
  - $\sqrt[4]{-16}$
  - $\sqrt[3]{-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}}$
- Határozzuk meg a következő egyenletek összes gyökét!
  - $z^2 = \bar{z}$
  - $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$