1. Határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{2x+1}+\dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}$ h*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$

2. Felhasználva a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1$ határértéket, vizsgáljuk meg léteznek-e az alábbi határértékek; ha igen számítsuk ki azokat!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$ $(\beta\neq 0)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin(6x)-\sin(7x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

3. Legyenek $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$ és $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Igazoljuk a következőket:

a) Ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, akkor $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=a^b$.

b) Ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)|=\infty$, és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)=b$, akkor $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=e^b$.

4. Az előző feladatot felhasználva számoljuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} (1+\sin(\pi x))^{\operatorname{ctg}(\pi x)}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{1+x}-x)^{\frac{1}{x}}$

5. Határozzuk meg a következő $f(x)$ függvények bal- és jobboldali határértékét a megadott x_0 helyen:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, $x_0=1$ b) $f(x)=3+\dfrac{1}{1+7^{\frac{1}{1-x}}}$, $x_0=1$ c) $f(x)=\dfrac{5}{(x-2)^3}$, $x_0=2$.

6. Hol folytonosak az alábbi függvények? Állapítsuk meg a szakadási helyeik típusát!

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$

c) $f(x)=3^{\frac{1}{x+1}}$ d) $f(x)=\dfrac{5x^2-3x}{2x}$

7. Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy az $f(x)$ függvény mindenhol folytonos legyen!

a) $f(x)=\begin{cases} x & \text{ha } |x|\leq 1 \\ x^2+ax+b & \text{ha } 1<|x| \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} (x-1)^3 & \text{ha } x\leq 0 \\ ax+b & \text{ha } 0<x<1 \\ \sqrt{x} & \text{ha } 1\leq x \end{cases}$

8. Határozzuk meg az alábbi függvények asszimptotáinak egyenletét:

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ b) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ c) $f(x)=\dfrac{2x^3+7x^2+3x-2}{x^2+2x+3}$