1. Számítsuk ki az alábbi limeszeket, ahol lehet, a L'Hospital-szabály segítségével! Mindig ellenőrizzük, hogy alkalmazható-e a L'Hospital-szabály!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sqrt{1+x}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xe^x}{e^x + x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{1/x} - 1}{2\operatorname{arctg} x - \pi}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg}(\pi x)$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \ln(-x)$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1+\ln(\sin x)}$ h) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x$ i) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$

2. a) Tegyük fel, hogy f folytonos az I intervallumon, és szigorúan monoton növő az I belsejében. Bizonyítsuk be, hogy ekkor f a teljes I intervallumon szigorúan monoton növő!

b) Tegyük fel, hogy f értelmezve van és szigorúan monoton növő az I és J egymástól nem diszjunkt intervallumokon. Bizonyítsuk be, hogy ekkor f a két intervallum unióján is szigorúan monoton növő!

3. Hol monoton növők, illetve fogyók az alábbi függvények?

a) $\sqrt[3]{x+2}$ b) $\cos(\pi \sin x)$

4. Adjuk meg azt a 0 kezdőpontú legbővebb intervallumot, ahol az xe^{-x} függvény invertálható!

5. Igazoljuk, hogy $1 + x < e^x$, ha $x > 0$.

6. Hány valós gyöke van a $3x^5 - 20x^3 + 60x + 7 = 0$ egyenletnek?

7. Magasabbrendű deriváltak segítségével állapítsuk meg, van-e lokális szélsőértéke, és ha igen, milyen, a következő függvényeknek az $x_0 = 0$ pontban?

a) $\cos x - 2x^2$ b) $\operatorname{ch} x + \cos x$

8. Keressük meg az $f(x)$ függvény abszolút szélsőértékeit a megadott intervallumon!

a) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$, $[-6, 6]$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $[-1, 8]$

9. Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{2}{3} \le \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1} \le 2$ minden $x \in \mathbb{R}$-re!

10. Adott térfogatú hengerek közül melyiknek legkisebb a felszíne?

11. Írjuk fel az $f(x)$ függvény n-edfokú Taylor-polinomját az x_0 pontban! Közelítsük a függvény értékét az x_1 pontban a Taylor-polinom segítségével, és a maradéktaggal becsüljük meg a közelítés hibáját!

a) $f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = 0$, $n = 2$, $x_1 = 0.2$ b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $x_0 = 1$, $n = 3$

12. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényekre ($D(f)$, folytonosság, paritás vagy periodicitás, tengelymetszetek, aszimptoták, monotonitás és szélsőértékek, konvexitás, konkávitás és inflexiós pontok, grafikon, $R(f)$).

a) $f(x) = x^2 e^{1/x}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

c) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} \dfrac{x}{x+1}$ d) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$