1. Számítsuk ki az $f(x) = x + 1$ függvényhez, a $[0, 1]$ intervallum $\Phi = \{\, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \,\}$ felosztásához és a $\{\, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5} \,\}$ reprezentánsrendszerhez tartozó integrálközelítő összeget!

2. Legyen $0 < a < b$, és $\Phi_n = \{\, a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, b \,\}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztássorozata, ahol $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.

a) Bizonyítsuk be, hogy ez a felosztássorozat minden határon túl finomodó.

b) Számítsuk ki az $\int\limits_a^b \frac{1}{x}\, dx$ integrált az előbbi felosztássorozathoz tartozó felső közelítő összegek limeszeként.

3. Keressük meg azokat a c számokat, amelyek kielégítik a megadott függvényre és intervallumra vonatkozó integrál-középértéktételt!

a) $f(x) = 3x^2 \qquad [-4, -1]$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \qquad [0, \frac{\pi}{4}]$

4. Határozzuk meg az alábbi deriváltak értékét!

$\frac{d}{dx} \int\limits_a^b \sin x^2\, dx \qquad \frac{d}{db} \int\limits_a^b \sin x^2\, dx \qquad \frac{d}{da} \int\limits_a^b \sin x^2\, dx$

5. Határozzuk meg a következőket!

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \cos t^2\, dt}{x}$

b) $\frac{d}{dx} \int\limits_0^{\arcsin x} \sqrt{\operatorname{tg} u}\, du$

6. Hol folytonos és hol differenciálható az $I(x) = \int\limits_{-1}^{\infty} f(t)\, dt$ függvény, ha $f(x) = \operatorname{sgn} x$ az előjelfüggvény: 1, ha x pozitív, -1, ha x negatív, és $f(0) = 0$?

7. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\int 7x^4\, dx$

b) $\int (x + 2)(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x + 4}{x^2}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3 + x}{x + 2}\, dx$

e) $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$

f) $\int (2x - 3)^{100}\, dx$

g) $\int e^{\cos x} \sin x\, dx$

h) $\int \sin x \cos x\, dx$

i) $\int \cos^3 x\, dx$

j) $\int \cos^4 x\, dx$

k) $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{x^2 + x - 3}\, dx$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 4x + 8}\, dx$

m) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}$

n) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx$

o) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}\, dx$

8. Számítsuk ki az alábbi görbék által határolt korlátos síkidomok területét!

a) $y = x^2, \;\; y = 1 - x^2$

b) $y = x^2, \;\; y = \dfrac{x^2}{2}, \;\; y = x$

9. Az $\int\limits_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx$ képlet segítségével számítsuk ki az $f(x) = \frac{4}{3} x^{3/2}$ $(0 \le x \le 2)$ görbedarab ívhosszát!