1. *Egy szabályos hatszög középpontja $K(4,1,4)$, két szomszédos csúcsa $A(3,1,5)$ és $B(3,2,4)$. Adjuk meg a többi négy csúcs koordinátáit!*

Megoldás: Legyen$\mathbf{a} = \overrightarrow{KA} = (-1,0,1)$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{KB} = (-1,1,0)$. A középpontból a többi mutató vektorok is mind a KAB háromszög valamelyik oldalával párhuzamosak: $\overrightarrow{KC} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (0,1,-1)$, $\overrightarrow{KD} = -\mathbf{a} = (1,0,-1)$, $\overrightarrow{KE} = -\mathbf{b} = (1,-1,0)$ és $\overrightarrow{KF} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = (0,-1,1)$, tehát a csúcsok $C(4,2,3)$, $D(5,1,3)$, $E(5,0,4)$ és $F(4,0,5)$.

2. *Három vektor páronként egyenlő szöget zár be egymással, összegük nullvektor. Mekkora ez a szög?*

Megoldás: Ha a három vektort egymás után rakjuk, szabályos háromszöget kapunk, így a vektorok szöge $120°$-os.

3. *Döntsük el, hogy kollineárisak-e az alábbi vektorpárok!*

a) $(-3,4,7),(2,5,1)$ *b)* $(12,9,15),(8,6,10)$ *c)* $(7,-4,2),(0,0,0)$

Megoldás: a) Nem, mert egyik vektor sem skalárszorosa a másiknak.
b) Igen: $(12,9,15) = \frac{3}{2}(8,6,10)$.
c) Igen: $(0,0,0) = 0 \cdot (7,-4,2)$.

4. *Kollineárisak-e az $A(1,1,1)$, $B(4,1,7)$, $C(5,-1,-1)$ pontok?*

Megoldás: $\overrightarrow{AB} = (3,0,6)$ és $\overrightarrow{AC} = (4,-2,-2)$ nem párhuzamosak egymással, így a három pont nem kollineáris.

5. *Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorhármasok!*

a) $(-4,2,1),(0,4,3),(-4,6,4)$ *b)* $(0,0,0),(2,-9,7),(-1,-1,0)$ *c)* $(-9,-9,3),(1,0,2),(1,1,1)$

Megoldás: a) Nem függetlenek: $(-4,6,4) = (-4,2,1) + (0,4,3)$.
b) Nem függetlenek: $(0,0,0) = 0 \cdot (2,-9,7) + 0 \cdot (-1,-1,0)$.
c) Függetlenek, ugyanis ha $x(-9,9,3) + y(1,0,2) + z(1,1,1) = (0,0,0)$, akkor a
$$\begin{array}{rrrcl} -9x & +y & +z & = & 0 \\ 9x & & +z & = & 0 \\ 3x & +2y & +z & = & 0 \end{array}$$
egyenletrendszer teljesül az x,y,z változókra, és ennek egyedül az $x = y = z = 0$ a megoldása.

6. *Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nem komplanáris vektorok. Komplanárisak-e a $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $5\mathbf{b}-4\mathbf{c}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ vektorok?*

Megoldás: Nem komplanárisak, ugyanis ha $x(2\mathbf{a}+3\mathbf{b}) + y(5\mathbf{b}-4\mathbf{c}) + z(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, akkor $(2x-z)\mathbf{a} + (3x+5y)\mathbf{b} + (-4y+z)\mathbf{b} = \mathbf{0}$, és az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}$ függetlensége miatt ebből $2x - z = 0$, $3x + 5y = 0$ és $-4y + z = 0$ következik, ennek az egyenletrendszernek pedig csak a triviális $x = y = z = 0$ megoldása van.

7. *Számítsuk ki az alábbi vektorok hosszát!*

a) $(8,-14,8)$ *b)* $(0,3,0)$ *c)* $(\frac{5}{31}, -\frac{30}{31}, \frac{6}{31})$

Megoldás: a) 18 b) 3 c) 1

8. *Normáljuk az alábbi vektorokat!*

a) $(4,-12,3)$ *b)* $(0,0,-7)$ *c)* $(1,2,-3)$

Megoldás: a) $\left(\frac{4}{13}, -\frac{12}{13}, \frac{3}{13}\right)$ b) $(0,0,-1)$ c) $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

9. *Számítsuk ki az alábbi vektorpárok szögét!*

a) $(7,-1,6)$, $(2,20,1)$ *b)* $(1,-4,1)$, $(1,2,-2)$

Megoldás: a) A vektorok skaláris szorzata 0, így $90°$-os szöget zárnak be.
b) A szögük koszinusza $\dfrac{1-8-2}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, tehát a vektorok szöge $135°$-os.

10. *A szögek kiszámítása nélkül döntsük el, hogy az alábbi vektorok hegyes-, derék- vagy tompaszöget zárnak be egymással!*

a) $(-3,2,0),(4,1,5)$ *b)* $(1,-1,9),(2,1,3)$ *c)* $(1,1,1),(-10,7,3)$

Megoldás: a) A skalárszorzatuk negatív, -10, ezért tompaszöget zárnak be.
b) A skalárszorzatuk pozitív, 28, ezért hegyesszöget zárnak be.
c) A skalárszorzatuk 0, ezért derékszöget zárnak be.

11. *Bontsuk fel a $(3,-6,9)$ vektort a $(2,-2,1)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre!*

Megoldás: Az $\mathbf{a}=(3,-6,9)$ vektor vetületvektora a $\mathbf{b}=(2,-2,1)$ vektorra $\mathbf{a}'=\dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}=\dfrac{27}{9}(2,-2,1)=(6,-6,3)$, a $\mathbf{b}$-re merőleges komponens pedig $\mathbf{a}-\mathbf{a}'=(-3,0,6)$, tehát a felbontás $\mathbf{a}=(6,-6,3)+(-3,0,6)$.

12. *Az egységnyi élhosszúságú kockában az egy csúcsból kiinduló két lapátló vektora x és y. Számítsuk ki az $x\cdot y$ skalárszorzatot! Mekkora szüget zár be ez a két vektor?*

Megoldás: A két lapátló végpontját összekötő szakasz is lapátló, így a három vektor szabályos háromszöget alkot. Tehát a két lapátló szöge $60°$-os, a hosszuk pedig $\sqrt{2}$, ezért a skalárszorzatuk $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 60°=1$.

13. *Az* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *vektorok páronként merőlegesek. Bizonyítsuk be, hogy* $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2$*!*

Megoldás: $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2\mathbf{ab}+2\mathbf{ac}+2\mathbf{bc}=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2$.

14. *Bizonyítsuk be, hogy* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2+(\mathbf{ab})^2=\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$*! (Lagrange-féle azonosság)*

Megoldás: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2+(\mathbf{ab})^2=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2+(\mathbf{ab})^2=(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi)^2+(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi)^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2$.

15. *Legyenek* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *merőleges vektorok. Mutassuk meg, hogy* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}=\mathbf{a}^2\mathbf{b}$*!*

Megoldás: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{a}$-ra, és benne van $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjában (ugyanis merőleges a sík normálvektorára, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$-re is), így párhuzamos, sőt a jobbrendszer szorzási szabálya szerint egyirányú $\mathbf{b}$-vel. A hossza pedig $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{a}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{a}|=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|=\mathbf{a}^2|\mathbf{b}|$. Tehát $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}=(\mathbf{a}^2|\mathbf{b}|/|\mathbf{b}|)\mathbf{b}=\mathbf{a}^2\mathbf{b}$.

16. *Az ABC háromszög csúcsainak a koordinátái $A(-3,4,0)$, $B(-9,11,42)$, $C(1,2,4)$. Mekkora a háromszög területe? Mekkora az A csúcsnál levő szöge? Mekkora a B csúcshoz tartozó magasság hossza?*

Megoldás: $\overrightarrow{AB}=(-6,7,42)$, $\overrightarrow{AC}=(4,-2,4)$. A háromszög területe $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|(112,192,-16)|=8|(7,12,-1)|=16\sqrt{194}$

17. *Az* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *egységvektorok közül* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *merőlegesek egymásra,* $\mathbf{c}$ *pedig* $30°$*-os szöget zár be síkjukkal. Számítsuk ki* $\mathbf{abc}$ *értékét!*

Megoldás: $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=1\cdot1\cdot\sin 90°=1$, és $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{b}$-re, így a $\mathbf{c}$ vektor $60°$-os szöget zár be az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$-vel. Tehát $\mathbf{abc}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}$.

18. *Mutassuk meg, hogy ha* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *egy téglatest egy csúcsból kiinduló élvektorai, akkor* $|\mathbf{abc}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$*!*

Megoldás: Az állítás nyilvánvaló, ha felhasználhatjuk, hogy a vegyesszorzat abszolút értéke a paralelepipedon térfogata, de most számoljuk ki a vegyesszorzat definíciójából! $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin 90°=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$, és $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ párhuzamos $\mathbf{c}$-vel, azaz a szögük $\varphi=0°$ vagy $\varphi=180°$, tehát $|\mathbf{abc}|=|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|\cdot|\cos\varphi|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|$.

19. *Mekkora az* $\mathbf{a}(2,3,4)$, $\mathbf{b}(2,3,1)$, $\mathbf{c}(1,2,3)$ *vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata?*

Megoldás: $\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}2&3&4\\2&3&1\\1&2&3\end{vmatrix}=2\cdot7-3\cdot5+4\cdot1=3.$

20. *Számítsuk ki az $ABCD$ tetraéder térfogatát, ha a csúcsainak koordinátái $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,1)$, $D(4,1,3)$!*

Megoldás: Az A csúcsból kiinduló élvektorok $\overrightarrow{AB}=(3,6,3)$, $\overrightarrow{AC}=(1,3,0)$ és $\overrightarrow{AD}=(2,2,2)$, így $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}3&6&3\\1&3&0\\2&2&2\end{vmatrix}=3\cdot6-6\cdot2+3\cdot(-4)=-6$, és a térfogat $\frac{1}{6}\cdot|-6|=1$.

21. *Döntsük el, hogy egy síkban vannak-e az alábbi pontok!*

a) $(2,-1,1),(5,5,4),(3,2,1),(4,1,3)$ *b)* $(1,2,-1),(0,1,5),(-1,2,1),(2,1,3)$

Megoldás: a) Ez a négy pont az előző feladat tetraéderének csúcsai, s minthogy a tetraéder térfogata nem 0, a csúcsok nem lehetnek egy síkban

b) Itt is a vegyesszorzatot kell kiszámolnunk: a négy pont akkor és csak akkor van egy síkban, ha az egyikből a többi irányába menő vektorok vegyesszorzata 0. Esetünkben ez $\begin{vmatrix}-1&-1&6\\-2&0&2\\1&-1&4\end{vmatrix}=-1\cdot2+1\cdot(-10)+6\cdot2=0$, tehát egy síkban van a négy megadott pont.

22*. *Bizonyítsuk be, hogy az* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *vektorok akkor és csakis akkor a helyvektorai három kollineáris pontnak, ha* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$*!*

Megoldás: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ helyvektorok végpontjai akkor és csak akkor kollineárisak, ha $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\,||\,(\mathbf{c}-\mathbf{a})$, azaz $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{0}$. Ezt a szorzatot kifejtve: $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$. Tehát akkor és csak akkor kollineárisak a végpontok, ha $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

23*. *Az* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *vektorok egy sík három nem kollineáris pontjának a helyvektorai. Bizonyítsuk be, hogy* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ *a sík egy normálvektora!*

Megoldás: A 22. feladat szerint a megadott $\mathbf{n}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ vektor nem 0, tehát elég belátni, hogy merőleges az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ helyvektorok végpontjainak síkjára. Az előző feladat megoldásában szerepelt, hogy ez az $\mathbf{n}$ vektor $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})$, tehát $\mathbf{n}$ merőleges a sík két nem párhuzamos $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ vektorára, és így az egész síkra is.

24*. *Bizonyítsuk be, hogy az* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ *egyenlőség egyenértékű az* $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$ *egyenlőséggel! (*$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *között nincs két kollineáris)*

Megoldás: Mindkét feltételből következik, hogy $\mathbf{c}$ felírható egyértelműen az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként. Az egyértelműség abból következik, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamosak, és két különböző felírás különbsége a $\mathbf{0}$ vektort adná nem triviális kombinációként. Ha $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{c}=-1\cdot\mathbf{a}+(-1)\cdot\mathbf{b}$. Ha $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}=:\mathbf{n}$, akkor $\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$ (mivel a vektorok között nincs két kollineáris), ezért $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ is párhuzamos egy $\mathbf{n}$ normálvektorú síkkal, és így $\mathbf{c}$ is felírható a sík bármely két nem párhuzamos vektorának, így $\mathbf{a}$-nak és $\mathbf{b}$-nek lineáris kombinációjaként is.

Legyen $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$. Erre az első egyenlőség tagjai közül a második $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=-\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, a harmadik pedig $\mathbf{c}\times\mathbf{a}=-\mu\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, ezért akkor és csak akkor egyenlő egymással a három szorzat (minthogy $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$), ha $1=-\lambda=-\mu$, vagyis ha $\mathbf{c}=-\mathbf{a}-\mathbf{b}$.