1. *Írjuk fel a $(0, 7, 0)$ ponton átmenő, az $x + 2y + 2z = 13$ egyenletű síkra merőleges egyenes paraméteres és paramétermentes egyenletrendszerét!*

Megoldás:
$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 7 + 2t \\ z &= 2t \end{aligned} \qquad x = \frac{y-7}{2} = \frac{z}{2}$$

2. *Írjuk fel az $(1, 1, -1)$, $(2, 0, 2)$, $(0, -2, 1)$ pontokon átfektetett sík paraméteres egyenletrendszerét és paramétermentes egyenletét!*

Megoldás: A pontokat összekötő vektorok közül kiválaszthatunk kettőt: az első és a második pontot összekötő $\mathbf{a} = (1, -1, 3)$ és az első és a harmadik pontot összekötő $\mathbf{b} = (-1, -3, 2)$ vektort. Ezek kombinációjaként megkapjuk az összes, az adott síkkal komplanáris vektort, vektoriális szorzatukként pedig a sík egy normálvektorát: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (7, -5, -4)$. Tehát a sík:

$$\begin{aligned} x &= 1 + s - t \\ y &= 1 - s - 3t \\ z &= -1 + 3s + 2t \end{aligned} \qquad 7x - 5y - 4z = 6$$

3. *Milyen helyzetűek az $x = 1+t$, $y = 1$, $z = t$ és az $x = 2-s$, $y = 1-s$, $z = 3-s$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott egyenesek? Adjuk meg egy olyan sík egyenletét, mely mindkét egyenessel párhuzamos!*

Megoldás: Az egyenletrendszerükből leolvasható, hogy az elsőnek irányvektora a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$ vektor, a másodiknak pedig a $\mathbf{v}_2 = (-1, -1, -1)$ vektor, tehát az egyenesek nem párhuzamosak. Lehetnek metszők vagy kitérők, aszerint, hogy van-e közös pontjuk. A két egyenlet összevetéséből kapjuk, hogy közös pontjuk csak akkor lehet, ha van olyan t és s, amelyre $1 + t = 2 - s$, $1 = 1 - s$ és $t = 3 - s$. A másodikból $s = 0$, a harmadikból ezután $t = 3$, de ez ellentmond az elsőnek. Így az egyenesek kitérők. Velük párhuzamos bármely olyan sík, amelynek a normálvektora a két irányvektor vektoriális szorzata, $(1, 0, -1)$. Ilyen például az $x - z = 0$ sík.

4. *Milyen helyzetűek az $x = 2+t$, $y = 1$, $z = 3+2t$ és az $x = 1$, $y = 2+s$, $z = 1$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott egyenesek?*

Megoldás: Könnyen látható, hogy nem párhuzamosak, így az előző feladathoz hasonlóan meg kell kereseni a metszéspontjukat, ha van olyan. Az egyenletrendszer megoldása $s = -1$, $t = -1$, $x = 1$. $y = 1$, $z = 1$. Vagyis a két egyenes metsző, az $(1, 1, 1)$ pontban metszik egymást.

5. *Határozzuk meg az $X(1, 2, 3)$ pontnak a $P(1, 1, 0)$ ponton átmenő $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ irányvektorú egyenesre vett vetületét és tükörképét!*

Megoldás: Az egyenes paraméteres egyenletrendszere:
$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 \\ z &= t \end{aligned}$$

Az X ponton átmenő, a $\mathbf{v}$ vektorra merőleges sík egyenlete $x + z = 4$. Az X pont vetülete az egyenesre az egyenesnek ezzel a síkkal vett metszéspontja: $M(\frac{5}{2}, 1, \frac{3}{2})$, a tükörképének irányvektora pedig $\overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OX} + 2\overrightarrow{XM} = (1, 2, 3) + 2(\frac{3}{2}, -1, -\frac{3}{2}) = (4, 0, 0)$, tehát az X tükörképe $X'(4, 0, 0)$.

6. *Határozzuk meg a $(0, 0, 12)$ pont és az $x = 4t$, $y = -t$, $z = 2t$ egyenes távolságát!*

Megoldás: Egy P pontnak egy egyenestől való távolsága $\dfrac{|\overrightarrow{QP} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$, ahol Q az egyenes egy pontja, $\mathbf{v}$ pedig az egyenes irányvektora. Ebben az esetben Q lehet $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v}$ pedig $(4, -1, 2)$, így a távolság $\frac{1}{\sqrt{21}}|(12, 48, 0)| = \frac{12}{\sqrt{21}}|(1, 4, 0)| = 4\sqrt{\frac{51}{7}}$. (Ki lehetne úgy is számítani, hogy a ponton át felveszünk egy az egyenesre merőleges síkot, és ezt elmetsszük az egyenessel. A metszéspont távolsága P-től a P pont és az egyenes távolsága.)

7. *Határozzuk meg az $X(1, 2, 3)$ pontnak az $x + z = 1$ egyenletű síkra vett vetületét és tükörképét!*

Megoldás: Az X-en átmenő, a síkra merőleges egyenes egyenletrendszere $x = 1 + t$, $y = 2$, $z = 3 + t$, ennek metszéspontja a síkkal a vetület: $M(-\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2})$, és a tükörkép $(1, 2, 3) + 2(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}) = (-2, 2, 0)$.

8. *Határozzuk meg a $(0, -1, 0)$ pont és a $2x + y + 2z = 4$ sík távolságát!*

Megoldás: $\dfrac{|2 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{5}{3}$. Vagy kiszámítható mint a ponton átmenő, a síkra merőleges egyenes síkkal való metszéspontjának a távolsága a ponttól.

9. *Mely pontban döfi a $P(1,1,0)$ és a $Q(3,1,2)$ pontokat összekötő egyenes a $S(2,1,3)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (1,1,1)$ normálvektorú síkot?*

Megoldás: Az egyenes egyenletrendszere $x = 1 + 2t$, $y = 1$, $z = 2t$, a sík egyenlete $x + y + z = 6$, a metszéspontjuk $(3,1,2)$.

10. *Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2,1,-1)$ ponton és merőleges a $2x + y - z = 3$, $x + 2y + z = 2$ síkok metszésvonalára!*

Megoldás: A metszésvonal merőleges mindkét normálvektorra, tehát az irányvektora párhuzamos ezek vektoriális szorzatával $(2,1,-1) \times (1,2,1) = (3,-3,3)$-mal. Ezért a keresett sík (egyik) normálvektora $(1,-1,1)$, és a sík egyenlete $x - y + z = 0$.

11. *Határozzuk meg az $x = 2 + t$, $y = 3t + 2$, $z = 4t + 3$ és $x = 1 - s$, $y = 3 + s$, $z = 2 + 2s$ egyenesek távolságát!*

Megoldás: Az első egyenes irányvektora $\mathbf{v} = (1,3,4)$, egyik pontja $P(2,2,3)$, a második irányvektora $\mathbf{w} = (-1,1,2)$, egyik pontja pedig $Q(1,3,2)$. A távolságuk $\dfrac{|\overrightarrow{PQ}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|} = \dfrac{|(1,-1,1)(2,-6,4)|}{|(2,-6,4)|} = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$.

12. *Határozzuk meg az $x + y = 1$ és $2x + y - 2z = 2$ síkok szögét!*

Megoldás: A síkok szöge megegyezik a normálvektorok szögével, ha az nem nagyobb $90°$-nál, különben pedig annak a kiegészítő szöge. A normálvektorok $(1,1,0)$ és $(2,1,-2)$, ezek szögének koszinusza $\dfrac{(1,1,0)(2,1,-2)}{|(1,1,0)| \cdot |(2,1,-2)|} = \dfrac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, tehát a szögük (és a síkok szöge is) $45°$-os.

13*. *Határozzuk meg az $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömb és a $x + y + z = 1$ sík metszeteként előálló alakzat paraméteres egyenletrendszerét! Milyen alakzatot kaptunk?*

Megoldás: A sík átmegy a gömb középpontján, így a metszet egy a síkban fekvő, $(1,0,0)$ középpontú, 1 sugarú kör. Az xy-síkra való vetülete ellipszis, amelynek egyenletét úgy kapjuk meg, hogy a sík $z = 1 - x - y$ alakú egyenletét behelyettesítjük a gömb egyenletébe: $1 = (x-1)^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + (1-x-y)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 2y + 2$, és az utóbbit teljes négyzetek összegére való felbontással $2(x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{2}y^2 - 4x - 2y + 2 = 2(x + \frac{1}{2}y - 1)^2 + \frac{3}{2}y^2$ alakra hozhatjuk, tehát az ellipszis egyenlete $(\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{\frac{3}{2}}y)^2 = 1$. Ezt paraméteresen is kifejezhetjük (a kör felírásához hasonlóan): $\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \sqrt{2} = \cos t$, $\sqrt{\frac{3}{2}}y = \sin t$, tehát a kör az $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{6}}\sin t + 1$, $y = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin t$, $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{6}}\sin t$ koordinátájú pontokból áll.

14. *Mi a mértani helye a tér azon pontjainak, amelyek egyenlő távolságra vannak az $A(2,2,1)$, $B(8,6,3)$ és $C(6,0,-1)$ pontoktól? Adjuk meg a kapott alakzat egyenletét vagy egyenletrendszerét!*

Megoldás: A-tól és B-től egyenlő távolságra levő pontok az AB szakasz felező merőleges síkjának, azaz az $(5,4,2)$ ponton átmenő, $(3,2,1)$ normálvektorú $3x + 2y + z = 25$ síknak a pontjai, a B-től és C-től egyenlő távolságra levők mértani helye pedig az $x + 3y + 2z = 18$ sík. A két sík metszetén, azaz az $x = t$, $y = 32 - 5t$, $z = -39 + 7t$ egyenesen levő pontok egyenlő távolságra vannak mindhárom ponttól.

15*. *(Pt: 5/90) Van-e olyan egyenes, amely átmegy a $P(-1,0,2)$ ponton, merőleges az $x = 10 + 3t$, $y = -1 - 6t$, $z = 7 + 2t$ egyenletrendszerű egyenesre, és attól 7 egység távolságra van? Ha van ilyen, illetve vannak ilyenek, adjuk meg az egyenletrendszerüket!*

Megoldás: Ha van ilyen egyenes, az benne van a P-n átmenő, a megadott egyenesre merőleges $S: 3x - 6y + 2z = 1$ síkban, és érinti azt a 7 sugarú hengert, amelynek tengelye a megadott egyenes, vagyis érinti azt a kört, ami ennek a hengernek az S-sel vett metszete. Ilyen érintő pontosan akkor létezik, ha P-nek a tengelytől való távolsága legalább 7. Könnyen ellenőrizhető, hogy a távolság $7\sqrt{2}$, tehát két különböző megoldás van. A kör középpontja a tengelynek az S-sel való metszéspontja, $K(7,5,5)$. Ha az érintési pont T, akkor a PTK derékszögű háromszög harmadik oldala is 7 hosszú, így a háromszög éppen $45°$-os, és ezért megkaphatjuk a T pontot úgy, hogy a PK felezőpontja, $F(3, \frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ körül, az S síkban maradva $90°$-kal elforgatjuk az $\overrightarrow{FK}$ vektort. Ez vektoriális szorzással is kiszámítható: $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OF} \pm \frac{1}{|\mathbf{n}|}\overrightarrow{FK} \times \mathbf{n} = (3, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}) \pm (2, -\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$. Tehát a lehetséges érintési pontok $(5,2,-1)$ és $(1,3,8)$, a megfelelő egyenesek pedig $x = -1 + 6t$, $y = 2t$, $z = 2 - 3t$, illetve $x = -1 + 2t$, $y = 3t$, $z = 2 + 6t$.