1. *Legyen a $P(H)$ hatványhalmazon az összeadás a szimmetrikus differencia: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, és a szorzás a metszet. Melyik testaxiómák nem teljesülnek erre a két műveletre?*

Megoldás: Legyen $\ominus$ a szimmetrikus differencia jele. A metszetről tudjuk, hogy kommutatív és asszociatív, és $A \cap H = A$ minden A-ra, tehát H a testek egységelemének felel meg. Viszont a metszet nem invertálható, mert $A \cap B = H$ csak akkor teljesül, ha $A = B = H$, vagyis H-n kívül semelyik elemnek nincs multiplikatív inverze.

A szimmetrikus differencia definíciójából rögtön látszik, hogy a művelet kommutatív. Asszociatív is: $(A\ominus B)\ominus C = ((A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}))\ominus C = (A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})})$ Az utolsó komplementer kifejezés átírható $(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{B}\cup A) = (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap A)\cup(B\cap\overline{B})\cup(B\cap A) = (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(B\cap A)$ alakba, így $(A\ominus B)\ominus C = (\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$ (pontosan azok az elemek vannak benne, amelyek A, B, C közül páratlan sok halmaznak elemei). Ez nyilván ugyanazt adja A, B, C tetszőleges permutációjára, így $(A \ominus B) \ominus C = (B \ominus C) \ominus A = A \ominus (B \ominus C)$. A $\ominus$-ra nézve neutrális elem az $\emptyset$: $A \ominus \emptyset = A$, és minden elem additív inverze önmaga. Már csak a disztributivitást kell ellenőrizni: $(A \ominus B) \cap C = (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (B \cap \overline{A} \cap C)$, míg $(A \cap C) \ominus (B \cap C) = (A \cap C \cap \overline{B \cap C}) \cup (B \cap C \cap \overline{A \cap C}) = (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (A \cap C \cap \overline{C}) \cup (B \cap C \cap \overline{A}) \cup (B \cap C \cap \overline{C}) = (A \cap C \cap \overline{B}) \cap (B \cap C \cap \overline{A})$, és ez egyenlő a korábban átalakított $(A \ominus B) \cap C$ kifejezéssel.

Tehát (M4) az egyetlen axióma, amelyik nem teljesül a testaxiómák közül (P(H) a megadott két művelettel kommutatív, egységelemes *gyűrűt* alkot).

2. *Bizonyítsuk be, hogy egy testben*

a) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ *b)* $\dfrac{1/a}{1/b} = \dfrac{b}{a}$

Megoldás: a) Azt kell belátni, hogy $ab + (-a)b = ab + a(-b) = 0$. Ez valóban igaz: $ab + (-a)b \overset{(D)}{=} (a + (-a))b \overset{(A4)}{=} 0b \overset{T}{=} 0$ (ahol T az előadáson bizonyított állítást jelöli: $0x = 0$ minden x-re). Továbbá $ab + a(-b) \overset{(M1)}{=} ba + (-b)a \overset{(D)}{=} (b + (-b))a \overset{(A4)}{=} 0a \overset{T}{=} 0$.

b) $\dfrac{a}{b} = a \cdot \dfrac{1}{b}$ definíció szerint. Mivel $\dfrac{1}{b} \cdot b = b \cdot \dfrac{1}{b} = 1$, az (M4) szerint $\dfrac{1}{1/b} = b$. Tehát $\dfrac{1/a}{1/b} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{1/b} = \dfrac{1}{a} \cdot b \overset{(M1)}{=} b \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{b}{a}$.

3. *Bizonyítsuk be, hogy*

a) a $K = \{0, 1\}$ halmaz az $1 + 1 = 0$ szabállyal, de a többi esetben a szokásos szorzással és összeadással (2 szerinti maradékokkal számolunk), testet alkot;

b) Ha K egy páros elemszámú véges test, akkor $a + a = 0$ minden $a \in K$-ra.

Megoldás: a) Csak azokat az eseteket kell ellenőrizni az axiómáknál, ahol $1 + 1$ szerepel, a többi következik a valós számok tulajdonságaiból. (A1) nyilvánvaló, (A2)-re a kritikus esetek: $(1 + 1) + 0 = 0 + 0 = 0 = 1 + 1 = 1 + (1 + 0)$ és $(1 + 1) + 1 = 0 + 1 = 1 = 1 + 0 = 1 + (1 + 1)$, (A4)-nél pedig 1 additív inverze 1. A disztributivitás, azaz $(a + b)c = ac + bc$ nyilván teljesül, mert $c = 0$-ra mindkét oldal 0, $c = 1$-re pedig mindkettő $a + b$.

b) Először belátjuk, hogy van olyan $a \neq 0$ elem, amelyre $a+a = 0$. Ugyanis különben minden nem 0 elemet párosíthatunk az ellentettjével (használva, hogy $-(-a) = a$), tehát összesen páratlan sok eleme lenne a testnek. Viszont ekkor tetszőleges b-re $0 = 0\cdot\frac{1}{a} = (a+a)\cdot\frac{1}{a} = a\cdot\frac{1}{a}+a\cdot\frac{1}{a} = 1+1$, és ebből minden b-re $0 = 0b = (1 + 1)b = b + b$.

4. *Legyen K test, és jelöljünk ki benne egy $P \subseteq K \setminus \{0\}$ részhalmazt (pozítív elemek halmaza), amelyre*

(1) $\forall a \neq 0$-ra a és $-a$ közül pontosan az egyik van P-ben;

(2) $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$;

(3) $a, b \in P \Rightarrow a \cdot b \in P$.

Bizonyítsuk be, hogy K rendezett test az $a < b \Leftrightarrow b - a \in P$ rendezéssel!

Megoldás: (R1): Tetszőleges a, b-re, ha $a \neq b$, akkor $a - b \neq 0$, és így (1) miatt vagy $a - b \in P$, amiből $b < a$, vagy $b - a = -(a - b) \in P$, amiből $a < b$.

(R2): Ha $a < b$ és $b < c$, akkor $b-a \in P$ és $c-b \in P$, tehát (2) miatt $c-a = (c-b)+(b-a) \in P$, vagyis $a < c$.

(R3): Ha $a < b$, akkor $b - a \in P$, és így minden c-re $(b+c) - (a+c) = b + c + ((-a) + (-c)) = b - a \in P$, ezért $a + c < b + c$.

(R4): Ha $c > 0$, akkor $c \in P$, tehát $a < b$ esetén $cb - ca = c(b - a) \in P$, amiből $ca < cb$.

5. *Melyik alulról, ill. felülről korlátos, melyiknek van infimuma, ill. szuprémuma, legkisebb, ill. legnagyobb eleme az alábbi halmazok közül $\mathbb{R}$-ben, illetve a d) kivételével $\mathbb{Q}$-ban?*

a) $\{0, 0,1, 0,11, 0,111, \dots\}$ *b)* $(1, \sqrt{2}\,] \cap \mathbb{Q}$

c) $\mathbb{N}$ *d)* $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ *értelmezési tartománya*

Megoldás: a) A $H = \{0, 0,1, 0,11, 0,111, \dots\}$ halmaz mindkét testben korlátos (azaz alulról és felülről is korlátos), sőt van infimuma: 0, és szuprémuma: $\frac{1}{9}$. A 0 egyúttal minimuma is a H halmaznak, mert alsó korlát, és $0 \in H$. Maximuma viszont nincs, hiszen a halmaz elemei végtelen, szigorúan növekvő sorozatot alkotnak. (Vagy másképp: ha lenne maximuma, akkor az megegyezne a szuprémumával, de $\frac{1}{9}$ nincs a halmazban). Azt kell még bizonyítani, hogy $\frac{1}{9}$ valóban a szuprémum. $0,99\dots9 < 1$, így H minden eleme kisebb $\frac{1}{9}$-nél, vagyis $\frac{1}{9}$ felső korlát. Ha ez nem lenne a legkisebb felső korlát, azaz létezne $a < \frac{1}{9}$, ami felső korlátja H-nak, akkor $1 - 9a > 0$, így valamilyen k-ra $10^k > \frac{1}{1-9a}$, és így $1 - 9a > 10^{-k}$, azaz $9a < 1 - 10^{-k}$, az utóbbi pedig H $(k+1)$-edik elemének 9-szerese.

b) Legyen $H = (1, \sqrt{2}\,] \cap \mathbb{Q}$. Ekkor H korlátos $\mathbb{R}$-ben és $\mathbb{Q}$-ban is (1 és 2 alsó és felső korlátok), infimuma 1, szuprémuma $\mathbb{R}$-ben $\sqrt{2}$, de $\mathbb{Q}$-ban nincs szuprémuma. Minimuma nincs, maximuma $\mathbb{R}$-ben $\sqrt{2}$, $\mathbb{Q}$-ban nincs. Az, hogy $\sup_{\mathbb{R}} H = \sqrt{2}$, abból következik, hogy bármely két $a < b$ valós számhoz van olyan $r \in \mathbb{Q}$, amelyre $a < r < b$ (ugyanis elég nagy $n \in \mathbb{N}^+$ számmal beszorozva az egyenlőtlenséget, $bn - an > 1$ lesz, és akkor van olyan m egész szám, amire $an < m < bn$, azaz $a < \frac{m}{n} < b$), tehát bármely $1 < a < \sqrt{2}$ valós számhoz létezik olyan $r \in \mathbb{Q}$, amire $a < r < \sqrt{2}$, és ezért a nem lehet felső korlát. Viszont ugyanígy kijön, hogy $\sup_{\mathbb{Q}} H$ nem lehet $\sqrt{2}$-nél nagyobb, és $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, tehát $\mathbb{Q}$-ban nincs H-nak szuprémuma.

c) $\mathbb{N}$-nek sem alsó, sem felső korlátja nincs, tehát nem lehet infimuma, szuprémuma, minimuma vagy maximuma sem.

d) A nevezőnek nullától különbözőnek, a gyök alatti kifejezésnek pedig nemnegatívnak kell lennie, tehát a függvény azokra az x-ekre van értelmezve, amelyekre vagy $x \le 0$ és $1 - x < 0$, ami ellentmondás, vagy $x \ge 0$ és $1 - x > 0$. Tehát az értelmezési tartomány a $D = [0, 1)$ intervallum. Ez nyilván korlátos (0 és 1 közötti), $\inf D = \min D = 0$, és $\sup D = 1$, de D-nek nincs maximuma.

6. *Adjuk meg az alábbi komplex számok kanonikus (algebrai) alakját:*

a) $z = (3 - 4i)(7 + 8i)$; *b)* $z = \dfrac{3 - 4i}{2 - i}$; *c)* $z = i^{87}$; *d)* $z = (1 + i)^9$.

Megoldás: a) $z = 53 - 4i$.

b) $z = \dfrac{3 - 4i}{2 - i} = \dfrac{(3 - 4i)(2 + i)}{1^1 + 2^2} = \dfrac{10 - 5i}{5} = 2 - i$

c) i néhány hatványát kiszámítva látjuk, hogy a hatványok 4 hosszú periódussal követik egymást: $i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \dots$. Így $i^{84} = 1$, és $i^{87} = 1 \cdot i^3 = -i$.

d) Észrevehetjük, hogy $(1 + i)^2 = 2i$, így $(1 + i)^9 = (2i)^4(1 + i) = 16i^4(1 + i) = 16 + 16i$.

7. *Legyen $z = 1 + 3i$ és $u = 2 - i$. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:*

a) $z\bar{z}$ *b)* $u/\bar{u}$ *c)* $|z - u|$ *d)* $|2z - zu|$ *e)* $|u/z\bar{u}^3|$.

Megoldás: a) $z\bar{z} = |z|^2 = 1^2 + 3^2 = 10$

b) $u/\bar{u} = (2 - i)/(2 + i) = (2 - i)(2 - i)/5 = (3 - 4i)/5 = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

c) $|z - u| = |-1 + 4i| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

d) $|2z - zu| = |z(2 - u)| = |z| \cdot |2 - u| = \sqrt{10} \cdot 1 = \sqrt{10}$

e) $\left|\dfrac{u}{z\bar{u}^3}\right| = \dfrac{|u|}{|z||\bar{u}|^3} = \dfrac{|u|}{|z||u|^3} = \dfrac{1}{|z||u|^2} = \dfrac{1}{5\sqrt{10}}$

8. *Mi a mértani helye a síkon azoknak a pontoknak, amelyeknek megfelelő z komplex számokra:*

a) $|z-5+i|=2$ *b)* $|z-i|=|z+i|$ *c)* $|z|=3iz$

d) $z+\bar{z}<4$ *e)* $2z+5=2\bar{z}$ *f)* $\left|\dfrac{z-3+4i}{z-i}\right|\geq 1$

Megoldás: a) $|z-5+i|=|z-(5-i)|$, tehát azok a z komplex számok elégítik ki az egyenletet, amelyekhez tartozó pont pontosan 2 távolságra van $(5-i)$-től: az $5-i$ középpontú, 2 sugarú kör pontjai.

b) A feltétel azt jelenti, hogy z távolsága i-től és $-i$-től ugyanannyi, tehát a mértani hely a két pontot összekötő szakasz felező merőlegese, azaz éppen a valós (azaz x) tengely. Másképp: felírhatjuk z-t algebrai alakban: $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$, és erre azt a feltételt kapjuk, hogy $|x+yi-i|=|x+yi+i|$, azaz $|x+(y-1)i|=|x+(y+1)i|$, vagyis $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$. Mindkét oldalt négyzetre emelve, egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy $-2y=2y$, azaz $y=0$, és így a $z=x\in\mathbb{R}$ alakú komplex számok adják a megoldást.

c) A két oldal abszolút értékét véve a $|z|=3|z|$ egyenlethez jutunk, így szükségképpen $|z|=0$, azaz $z=0$, az pedig valóban megoldás. Tehát a mértani hely egyetlen pontból, az origóból áll.

d) A $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ behelyettesítéssel a $2x<4$ azaz $x<2$ egyenlőtlenséghez jutunk, tehát a megoldás az $x=2$ egyenes bal oldalán fekvő félsík (a határoló egyenes nélkül).

e) A $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy $2yi+5=-2yi$, ami ellenmond az algebrai alak egyértelműségének. Tehát az üres halmaz a keresett mértani hely.

f) Átrendezve az egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy $|z-(3-4i)|\geq|z-i|$ (és $|z-i|$ nem nulla). Ezt azok az i-től különböző pontok elégítik ki, amelyek i-hez közelebb vannak, mint $3-4i$-hez, azaz a két pontot összekötő szakasz felező merőlegese által határolt, i-t tartalmazó félsík, az i nélkül (de a határegyenessel együtt).

9. *Számítsuk ki a $16-30i$ és a $4+2i$ komplex szám négyzetgyökeit algebrai alakban!*

Megoldás: Keressük a négyzetgyököt $x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ alakban! Az $(x+yi)^2=16-30i$ egyenletet mindkét oldalon algebrai alakra hozva az $x^2-y^2=16$, $2xy=-30$ egyenletrendszert kapjuk. Ebből $y=-15/x$ és $x^2-\frac{225}{x^2}=16$, azaz $x^4-16x^2-225=0$ következik. Az utóbbi $x^2=\dfrac{16\pm\sqrt{1156}}{2}=8\pm17$ megoldásaiból csak a pozitív jó ($x\in\mathbb{R}$ miatt $x^2\geq0$), tehát $x^2=25$, $x=\pm5$, és $y=\mp3$, vagyis $16-30i$ négyzetgyökei $\pm(5-3i)$. Hasonlóan számolva, a $4+2i$ négyzetgyökei $\pm\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{5}}}i\right)$.

10. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:*

a) $z^2-6z+13=0$; *b)* $|z|-z=1+2i$; *c)* $z^2+2iz-1+i=0$.

Megoldás: a) $z=\dfrac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=3\pm2i$.

b) $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ behelyettesítéssel $(\sqrt{x^2+y^2}-x)-yi=1+2i$, így $y=-2$ és $\sqrt{x^2+4}-x=1$. Az utóbbiból $\sqrt{x^2+4}=x+1$, azaz $x^2+4=x^2+2x+1$, tehát $x=\frac{3}{2}$ (és ez valóban megoldás), és $z=\frac{3}{2}-2i$.

c) $z=\frac{-2i\pm\sqrt{-4+4-4i}}{2}=-i\pm\sqrt{-i}=-i\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\mp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i\right)$.

11. *Írjuk fel az alábbi számok trigonometrikus alakját!*

a) $1+i\sqrt{3}$ *b)* $-4i$ *c)* $\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ *d)* $3+i$

Megoldás: a) $1+i\sqrt{3}=2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

b) $-4i=4(-i)=4(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$

c) $\sqrt{6}-i\sqrt{2}=2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)=2\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))$

d) $3+i=\sqrt{10}(\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}}i)=\sqrt{10}(\cos(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}})+i\sin(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}))$

12. *Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét!*

a) $(1+i\sqrt{3})^3$ *b)* $\sqrt{\sqrt{3}+i}$ *c)* $\sqrt[4]{-16}$ *d)* $\sqrt[3]{-4\sqrt{2}+i4\sqrt{2}}$

Megoldás: a) $(1+i\sqrt{3})^3=\left(2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\right)^3=8(\cos\pi+i\sin\pi)=-8$.

b) $\sqrt{\sqrt{3}+i}=\sqrt{2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)}=\sqrt[4]{2}(\cos(15^\circ+k\cdot 180^\circ)+i\sin(15^\circ+k\cdot 180^\circ))=\pm\sqrt[4]{2}(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)$. De kiszámítható algebrai alakban is: $\pm\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$.

c) $\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16(\cos\pi+i\sin\pi)}=2(\cos(\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}))$, ahol $k=0,1,2,3$, tehát a szögek $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ és $\frac{7\pi}{4}$. Algebrai alakba átírva az eredményt: $\pm\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$ (az előjeleknek mind a négy variációjával).

d) $\sqrt[3]{-4\sqrt{2}+i4\sqrt{2}}=\sqrt[3]{8(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)}=2(\cos(45^\circ+k\cdot 120^\circ)+i\sin(45^\circ+k\cdot 120^\circ))$, ahol $k=0,1,2$, tehát a szögek 45°, 165° és 285°.

13. *Határozzuk meg a következő egyenletek összes gyökét!*

a) $z^2=\overline{z}$ *b)* $z^6+2z^3+2=0$

Megoldás: a) Az egyenlet mindkét oldalának az abszolút értékét véve azt kapjuk, hogy $|z|^2=|z|$, amiből $|z|=0$ vagy 1. Az első esetben $z=0$, a másodikban $\overline{z}=\frac{1}{z}$, így az egyenlet $z^3=1$ alakra hozható, aminek a megoldásai $z=\cos(k\cdot\frac{2\pi}{3})+i\sin(k\cdot\frac{2\pi}{3})$, ahol $k=0,1,2$.

b) Az egyenlet másodfokú z^3-re, és a megoldása $z^3=-1\pm i$. Ezt trigonometrikus alakra hozzuk: $z^3=\sqrt{2}(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)$ vagy $z^3=\sqrt{2}(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ)$. Tehát a megoldások:
$z_{1,2,3}=\sqrt[6]{2}(\cos(45^\circ+k\cdot 120^\circ)+i\sin(45^\circ+k\cdot 120^\circ))$, és
$z_{4,5,6}=\sqrt[6]{2}(\cos(75^\circ+k\cdot 120^\circ)+i\sin(75^\circ+k\cdot 120^\circ))$

.