1. *a) Írjuk fel az $a_n = 1-(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ sorozat első 6 tagját! Adjuk meg a $b_n = a_{2n-1}a_{2n}$ sorozat általános tagját!*
b) Adjuk meg n-nel kifejezve a $0,\ 2,\ 0,\ 2,\ \ldots$ sorozat n-edik tagját!
c) Adjunk a rekurzívan megadott $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 3a_n - 2$ sorozatra általános képletet!

Megoldás: a) $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{4}{3}$, $a_4 = \frac{3}{4}$, $a_5 = \frac{6}{5}$, $a_6 = \frac{5}{6}$.
$b_n = \left(1-(-1)^{2n-1}\frac{1}{2n-1}\right)\left(1-(-1)^{2n}\frac{1}{2n}\right) = \left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) = \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n} = 1.$
b) $a_n = 1 + (-1)^n$.
c) $a_{n+1}-1 = 3a_n - 3 = 3(a_n-1)$, tehát a $b_n = a_n - 1$ sorozatra $b_n = 3b_{n-1} = 3^2 b_{n-2} = \ldots = 3^{n-1}b_1 = 3^n$, amiből $a_n = 3^n + 1$.

2. *Állapítsuk meg a következő sorozatok mindegyikéről, hogy korlátos-e, monoton-e (növő vagy fogyó?), konvergens-e (hova tart?), ha divergens, akkor tart-e ∞-hez vagy $-\infty$-hez, mik a torlódási pontjai!*

$a_n = \cos\frac{n\pi}{4}$ $\qquad b_n = \frac{n-1}{n}$ $\qquad c_n = 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

$d_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 10^{-k}$ $\qquad e_n = -2^n$ $\qquad f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot k^2$

Megoldás:
$a_n = \cos\frac{n\pi}{4}$ korlátos ($K = 1$), a tagjai periodikusan, 8-anként ismétlődnek:
$\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \ldots$. Tehát minden lehetséges értéke torlódási pont (a sorozat végtelen sokszor felveszi ezeket), így nem lehet konvergens, és láthatóan nem monoton. $\pm\infty$-hez nem tarthat egy korlátos sorozat.
$b_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ korlátos ($K = 1$), monoton növő, 1-hez konvergál, és így ez az egyetlen torlódási pontja.
$c_n = 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ korlátos ($K = 2$ megfelel), nem monoton, 1-hez konvergál, és így 1 az egyetlen torlódási pontja.
$d_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 10^{-k}$ korlátos ($K = 1$, sőt $K = \frac{1}{9}$ is elég), monoton növő, $\frac{1}{9}$-hez konvergál, így ez az egyetlen torlódási pontja.
$e_n = -2^n$ monoton fogyó, nem korlátos (csak felülről), $-\infty$-hez divergál, nincs torlódási pontja.
$\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot k^2$ nem monoton. Az $f_{2n} = \sum\limits_{\ell=1}^{n}((2\ell)^2 - (2\ell-1)^2) = \sum\limits_{\ell=1}^{n} 4\ell - 1 = 2n(n+1) - 1$ részsorozata ∞-hez tart, az $f_{2n+1} = -1 - \sum\limits_{\ell=1}^{n}((2\ell+1)^2 - (2\ell)^2) == -1 - \sum\limits_{\ell=1}^{n} 4\ell + 1 = -2n(n+1) - 2$ részsorozata pedig $-\infty$-hez, tehát maga az f_n sorozat nem konvergens, és ∞-hez vagy $-\infty$-hez sem tart. Ebből az is látszik, hogy nem korlátos. Torlódási pontja sincs, mert abszolút értékben ∞-hez tart.

3. *Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!*

a) $n^3 - 16n^2 + 3n$

b) $3^n - 2^{2n+1}$

c) $\dfrac{n^5 - 2n + 1}{n^3 + n^2 - 32}$

d) $\sqrt[3]{n^2 - 2n} - n\sqrt{n+1}$

e) $\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2 - 3n}$

f) $\dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

g) $\dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

h) $(n^6 - 5n + 1) \cdot 2^{-n}$

i) $\dfrac{2^{-n} + 3^{-n}}{1 - \frac{n+2}{n-1}}$

j) $\dfrac{\sin n}{n}$

Megoldás: a) $n^3 - 16n^2 + 3n = n^3(1 - \frac{16}{n} + \frac{3}{n^2}) \to \infty$.
b) $3^n - 2^{2n+1} = 3^n = 2 \cdot 4^n = 4^n(\frac{3}{4}^n - 2) \to \infty \cdot (-2) = -\infty$.
c) $\dfrac{n^5 - 2n + 1}{n^3 + n^2 - 32} = \dfrac{n^5(1 - 2n^{-4} + n^{-5})}{n^3(1 + n^{-1} - 32n^{-3})} = n^2 \cdot \dfrac{1 - 2n^{-4} + n^{-5}}{1 + n^{-1} - 32n^{-3}} \to \infty \cdot 1 = \infty.$
d) $\sqrt[3]{n^2 - 2n} - n\sqrt{n+1} = \sqrt[3]{n^2(1 - 2n^{-1})} - n\sqrt{n(1 + n^{-1})} = n^{2/3}\sqrt[3]{1 - 2n^{-1}} - n^{3/2}\sqrt{1 + n^{-1}} = n^{3/2}(n^{-5/6}\sqrt[3]{1 - 2n^{-1}} - \sqrt{1 + n^{-1}}) \to \infty \cdot (0 - 1) = -\infty.$

e) $\infty-\infty$ alakú limesz, és a leggyorsabban végtelenhez tartó tag kiemelésével (ez mindkét összeadandóban az n) $\infty\cdot 0$ alakú lesz, tehát nem lehet megoldani a d)-ben használt módszerrel. Bővítsük a konjugálttal, hogy kiessen az n: $\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-3n}=\dfrac{(n^2+2)-(n^2-3n)}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-3n}}=\dfrac{2+3n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-3n}}=$ $\dfrac{n(\frac{2}{n}+3)}{n(\sqrt{1+2n^{-2}}+\sqrt{1-3n^{-1}})}\to\dfrac{3}{2}$.

f) $\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\dfrac{3^n\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3^{n+1}\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}\to\dfrac{1}{3}$.

g) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=(\sqrt{n^2+1}-n)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\dfrac{(n^2+1)-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}\cdot\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(n+1)-n}=\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}+n}=$ $\dfrac{\sqrt{n}(\sqrt{1+n^{-1}}+1)}{n(\sqrt{1+n^{-2}}+1)}=\dfrac{\sqrt{1+n^{-1}}+1}{\sqrt{n}(\sqrt{1+n^{-2}}+1)}\to 0$.

h) $(n^6-5n+1)\cdot 2^{-n}=n^6(1-5n^{-5}+n^{-6})\cdot 2^{-n}=\dfrac{n^6}{2^n}\cdot(1-5n^{-5}+n^{-6})=0$, mert tudjuk, hogy $n^a<<b^n$, ha $a\in\mathbb{N}^+$ és $b>1$.

i) $\dfrac{2^{-n}+3^{-n}}{1-\frac{n+2}{n-1}}=\dfrac{2^{-n}+3^{-n}}{\frac{-3}{n-1}}=-n\cdot\dfrac{1-n^{-1}}{3}\cdot 2^{-n}\left(1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-n}\right)=-\dfrac{n}{2^n}\cdot\dfrac{1-n^{-1}}{3}\cdot\left(1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-n}\right)\to 0$.

4. *A* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ *és* $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ *limeszek felhasználásával számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!*

a) $\left(\dfrac{n+2}{n^3-n^2+1}\right)^{1/n}$

b) $\left((n^2+5)(2^{-n}+3^{-n})\right)^{1/2n}$

c) $(n+2)^{1/\sqrt{n}}$

d) $\left(\dfrac{n^2-n}{n^2+2n-3}\right)^{5n}$

e) $\left(\dfrac{2^n+3}{2^n+1}\right)^{n}$

Megoldás: a) 0^0 típusú limesz (mint ahogy az $\sqrt[n]{n}$ reciproka is).

$$\left(\frac{n+2}{n^3-n^2+1}\right)^{1/n}=\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1+2n^{-1}}{1-n^{-1}+n^{-3}}\right)^{1/n}=\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2}\cdot\left(\frac{1+2n^{-1}}{1-n^{-1}+n^{-3}}\right)^{1/n}\to\frac{1}{1^2}\cdot 1^0=1.$$

b) $(n^2+5)(2^{-n}+3^{-n})=\dfrac{n^2}{2^n}\left(1+5n^{-2}\right)\left(1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-n}\right)\to 0$, így 0^0 típusú a limesz. Az előbbi kiemelést használva: $\left((n^2+5)(2^{-n}+3^{-n})\right)^{1/2n}=\left(\dfrac{n^2}{2^n}\right)^{1/2n}\cdot\left((1+5n^{-2})\left(1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-n}\right)\right)^{1/2n}=$
$=\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{2}}\cdot\left((1+5n^{-2})\left(1+\left(\frac{3}{2}\right)^{-n}\right)\right)^{1/2n}\to\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1^0=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) ∞^0 típusú limesz. $(n+2)^{1/\sqrt{n}}=(n(1+2^{-n}))^{1/\sqrt{n}}=\left((\sqrt{n})^{1/\sqrt{n}}\right)^2(1+2^{-n})^{1/\sqrt{n}}\to 1^2\cdot 1^0=1$.

d) 1^∞ típusú limesz.

$$\left(\frac{n^2-n}{n^2+2n-3}\right)^{5n}=\left(1+\frac{-3n+3}{n^2+2n-3}\right)^{5n}=\left(1+\frac{-3n+3}{n^2+2n-3}\right)^{\frac{n^2+2n-3}{-3n+3}\cdot\frac{-3n+3}{n^2+2n-3}\cdot 5n}=$$

$\left(\left(1+\frac{-3n+3}{n^2+2n-3}\right)^{\frac{n^2+2n-3}{-3n+3}}\right)^{\frac{-3n+3}{n^2+2n-3}\cdot 5n}\to e^{-15}$, mert $(1+a_n)^{1/a_n}\to e$, ha $a_n\to 0$, és $\frac{-3n+3}{n^2+2n-3}5n=\frac{-15n^2+15n}{n^2+2n-3}\to -15$.

e) 1^∞ típusú limesz. $\left(\dfrac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n=\left(1+\dfrac{2}{2^n+1}\right)^n=\left(\left(1+\dfrac{2}{2^n+1}\right)^{\frac{2^n+1}{2}}\right)^{\frac{2}{2^n+1}\cdot n}\to e^0=1$, mert $\frac{2}{2^n+1}\cdot n\to 0$.

5. *Legyen* $[a_n]$ *pozitív tagú számsorozat. Melyikből következik melyik az alábbi három állítás közül? Mind a hat esetre vagy bizonyítsuk, hogy igaz a következtetés, vagy adjunk ellenpéldát!*

A: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$

B: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1$

C: $[a_n]$ *konvergens*

Megoldás: $C \Rightarrow A$ igaz, mert ha $[a_n]$ konvergens: $\lim_{n\to\infty} = A \in \mathbb{R}$, akkor $a_{n+1} \to A$ is igaz, tehát a limeszek műveleti szabályai szerint $\lim(a_{n+1} - a_n) = A - A = 0$. Viszont B nem jön ki ugyanígy abban az esetben, amikor $A = 0$. És ilyen esetből ellenpéldát is választhatunk: $a_n = 2^{-n} \to 0$, tehát konvergens, de $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 2$. Tehát $C \not\Rightarrow B$. Ugyanez a sorozat mutatja azt is, hogy $A \not\Rightarrow B$, ugyanis $a_n - a_{n+1} = -\frac{1}{2^{n+1}} \to 0$. Azt, hogy $B \not\Rightarrow C$ és $B \not\Rightarrow A$, mutatja az $a_n = n$ sorozat: $\frac{n}{n+1} \to 1$, de $(n+1) - n = 1 \to 1 \neq 0$, és az $n \to \infty$, tehát a sorozat nem konvergens. Végül az $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ sorozat mutatja, hogy $A \not\Rightarrow C$, ugyanis $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} \to 0$, de $\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \geq 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$ miatt $a_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$, így a sorozat nem korlátos, tehát nem is konvergens.

6*. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy* $[a_n]$ *sorozatnak minden* 0*-sorozattal vett szorzata* 0*-sorozat, akkor* $[a_n]$ *korlátos!*

Megoldás: Tegyük fel, hogy az $[a_n]$ sorozat nem korlátos. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}^+$-ra van olyan n_k index, hogy $|a_{n_k}| > k$, és azt is feltehetjük, hogy az $[n_k]$ sorozat szigorúan monoton növő. Legyen b_n az a sorozat, amelyre $b_{n_k} = 1/a_{n_k}$ minden k-ra, és a többi tagja 0. Ekkor $[b_n]$ 0-sorozat, mert minden $\varepsilon > 0$-ra van olyan k, hogy $\frac{1}{k} < \varepsilon$, és így $n_0 = n_k$-tól kezdve $|b_n| < \varepsilon$. Viszont $[a_n b_n]$-ben az n_k-adik tagok 1-ek, tehát ez a sorozat nem tart 0-hoz.

7. *Bizonyítsuk be, hogy az* $\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^n$ *sorozat monoton fogyó, és e-hez tart.*

Megoldás: Azt kell belátni, hogy $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^n$, azaz $\sqrt[n]{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} \leq 1 + \dfrac{1}{n-1}$. A mértani és számtani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk $(1 + \frac{1}{n})^2$-re és $n-1$ darab $(1 + \frac{1}{n})$-re. Azt kapjuk, hogy

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + (n-1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3},$$

és $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq 1 + \frac{1}{n-1}$, mert 1 kivonása és $n^3(n-1)$-gyel való beszorzás után az utóbbi egyenlőtlenség $n^3 - 1 < n^3$ alakra hozható.

Másrészt $(1 + \frac{1}{n-1})^n = (1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}(1 + \frac{1}{n-1}) \to e \cdot 1 = e$.

8. *(Hányados-kritérium) Bizonyítsuk be, hogy ha* $a_n > 0$ *minden* n*-re, és* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to q < 1$, *akkor* $a_n \to 0$.

Megoldás: Legyen $q < q_0 < 1$. Ekkor létezik olyan n_0, hogy $n \geq n_0$-ra $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q| < q_0 - q$, így $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q_0$. Tehát $n \geq n_0$-ra $0 < a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0} < q_0^{n-n_0} \cdot a_{n_0} \to 0$, ezért $a_n \to 0$.

9. *A hányados-kritérium felhasználásával adjunk bizonyítást a következő limeszekre!*

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0$ *b)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ *a)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n} = 0$

Megoldás: a) $\dfrac{\frac{(n+1)^k}{(n+1)!}}{\frac{n^k}{n!}} = \dfrac{(n+1)^k}{n^k} \cdot \dfrac{n!}{(n+1)!} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^k \cdot \dfrac{1}{n+1} \to 1^k \cdot 0 = 0 < 1$, így $\dfrac{n^k}{n!} \to 0$.

b) $\dfrac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \dfrac{(n+1)!}{n!} \cdot \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (n+1) \cdot \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \cdot \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \dfrac{1}{e} < 1$, így $\dfrac{n!}{n^n} \to 0$.

c) $\dfrac{\frac{(n+1)^{n+1}}{3 \cdot 6 \cdots 3n \cdot (3n+3)}}{\frac{n^n}{3 \cdot 6 \cdots 3n}} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \dfrac{3 \cdot 6 \cdots 3n}{3 \cdot 6 \cdots 3n \cdot (3n+3)} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n (n+1) \dfrac{1}{3n+3} = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to \dfrac{e}{3} < 1$, így $\dfrac{n^n}{3 \cdot 6 \cdots 3n} \to 0$. (Az, hogy $e < 3$, következik például a 7. feladatból, ugyanis ha az ott szereplő sorozat monoton fogyóan tart e-hez, akkor minden tagja, így a hatodik: $\left(\frac{6}{5}\right)^6 = \frac{46656}{15625} = 2,985984$ is nagyobb e-nél.)