1. *Határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket!*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$ *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{2x+1}+\dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ *e)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$ *g)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}$ *h*)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$

Megoldás: a) Használjuk, hogy két polinom hányadosának limesze $\pm\infty$-ben megegyezik a főtagok hányadosának limeszével. Ez itt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x)^{20}(3x)^{30}}{(2x)^{50}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{20}\cdot 3^{30}\cdot x^{50}}{2^{50}\cdot x^{50}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$.

b) $\infty-\infty$ típusú limesz. Hozzuk a két törtfüggvényt közös nevezőre, hogy esetleg kiessen a számlálóban a leggyorsabban végtelenhez tartó tag!
$\dfrac{x^2}{2x+1}+\dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2} = \dfrac{(-2x^4+x^2)+(2x^4+9x^3+4x^2-4x-2)}{(2x+1)(1-2x^2)} = \dfrac{9x^3+5x^2-4x-2}{(2x+1)(1-2x^2)}$. Felhasználva az a) részben is használt tételt, a határérték $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x^3}{(2x)(-2x^2)} = -\dfrac{9}{4}$.

c) $\frac{7}{3}$

d) 1-ben a számláló és a nevező is 0-hoz tart, így kiemelhetjük a polinomokból az $(x-1)$ gyöktényezőt.
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+5}{x+1} = 3.$

e) A $\infty-\infty$ típusú limeszeket úgy tudjuk kiértékelni, hogy kiemeljük a leggyorsabban ∞-hez tartó tagot.
$\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}} = \dfrac{x\sqrt{1+x^{-2}}-x^{2/3}\sqrt[3]{1+x^{-2}}}{x\sqrt[4]{1+x^{-4}}-x^{4/5}\sqrt[5]{1+x^{-4}}} = \dfrac{x\left(\sqrt{1+x^{-2}}-x^{-1/3}\sqrt[3]{1+x^{-2}}\right)}{x\left(\sqrt[4]{1+x^{-4}}-x^{-1/5}\sqrt[5]{1+x^{-4}}\right)}$,
és x-szel egyszerűsítve látszik, hogy a határérték ∞-ben 1.

f) $\infty-\infty$ alakú limesz, amit a leggyorsabban végtelenhez tartó tagok kiemelésével sem lehet kiértékelni (akkor $\infty\cdot 0$ lenne), ezért gyöktelenítünk.
$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} = \dfrac{\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} =$
$\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{1+x^{-1/2}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{x^{-1}+x^{-3/2}}}+1\right)}$, és ennek a limesze ∞-ben $\frac{1}{2}$.

g) $\frac{0}{0}$ típusú; itt is érdemes gyökteleníteni.
$\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x} = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{\sin x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1-\operatorname{tg} x}\right)} = \dfrac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1-\operatorname{tg} x}\right)}$, és $\sin x$-szel való egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy a limesze 0-ban 1.

h*) $\frac{0}{0}$ típusú limesz, ezért megpróbáljuk egyszerűsíteni. A számláló kifejezhető $\cos x$-szel: $1-\operatorname{tg}^2 x = 1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x}$. Így $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\cos^2-1}{\cos^2 x(\sqrt{2}\cos x-1)} =$
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\cos x+1}{\cos^2 x} = \dfrac{1+1}{\frac{1}{2}} = 4.$

2. *Felhasználva a* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *határértéket, vizsgáljuk meg léteznek-e az alábbi határértékek; ha igen számítsuk ki azokat!*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$ $(\beta\neq 0)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin(6x)-\sin(7x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ *d)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

Megoldás: a) $\alpha=0$ esetén 0 a limesz. Feltesszük, hogy $\alpha\neq 0$.
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)/\alpha x}{\sin(\beta x)/\beta x}\cdot\frac{\alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}.$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin(6x)-\sin(7x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x/x)\cdot x}{(\sin(6x)/6x)\cdot 6x - (\sin(7x))/7x)\cdot 7x} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x/x)}{(\sin(6x)/6x)\cdot 6 - (\sin(7x))/7x)\cdot 7} = -1.$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \frac{(1+\operatorname{tg} x)-(1+\sin x)}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x})} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x})} =$
$\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x})}$. A c) feladat eredményét is felhasználva azt kapjuk, hogy $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \frac{1}{4}$.

3. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ és $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Igazoljuk a következőket:*

a) Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ és $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, akkor $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = a^b$.

b) Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$, és $\lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1) = b$, akkor $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^b$.

4. *Az előző feladatot felhasználva számoljuk ki a következő határértékeket:*

a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ *b)* $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$

c) $\lim_{x\to 1}(1+\sin(\pi x))^{\operatorname{ctg}(\pi x)}$ *d)* $\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{\frac{1}{x}}$

Megoldás: a) $\lim_{x\to 1}\frac{1+x}{2+x} = \frac{2}{3}$, és $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1} 1+\sqrt{x} = 2$, így $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

b) 1^∞ típusú limesz, és $\lim_{x\to\infty}(8x^2+3)\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-16x^2-6}{2x^2+5} = -8$,
így $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3} = e^{-8}$.

c) Itt is az előző feladat b) részét tudjuk használni. $\lim_{x\to 1}(1+\sin(\pi x)) = 1+\sin\pi = 1$, $\lim_{x\to 1}|\operatorname{ctg}(\pi x)| = \infty$, továbbá $\lim_{x\to 1}\operatorname{ctg}(\pi x)\sin(\pi x)) = \lim_{x\to 1}\cos(\pi x) = -1$, így
$\lim_{x\to 1}(1+\sin(\pi x))^{\operatorname{ctg}(\pi x)} = e^{-1}$

d) $\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x}-x = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|} = \infty$, és $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}-x-1) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}}{x}(1-\sqrt{1+x}) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}}{x}\cdot$
$\frac{-x}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}$, tehát $\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{e}$.

5. *Határozzuk meg a következő $f(x)$ függvények bal- és jobboldali határértékét a megadott x_0 helyen:*

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$, $x_0 = 1$ *b)* $f(x) = 3+\frac{1}{1+7^{\frac{1}{1-x}}}$, $x_0 = 1$ *c)* $f(x) = \frac{5}{(x-2)^3}$, $x_0 = 2$.

Megoldás: a) $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{|x-1|}\cdot(x+1) = \lim_{x\to 1^-}-(x+1) = -2$, míg $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{|x-1|}\cdot$
$(x+1) = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$

b) $\lim_{x\to 1^-} 3+\frac{1}{1+7^{\frac{1}{1-x}}} = 3+\frac{1}{1+7^{\frac{1}{0+}}} = 3+\frac{1}{1+7^\infty} = 3+\frac{1}{1+\infty} = 3+0 = 3$, és
$\lim_{x\to 1^-} 3+\frac{1}{1+7^{\frac{1}{1-x}}} = 3+\frac{1}{1+7^{\frac{1}{0-}}} = 3+\frac{1}{1+7^{-\infty}} = 3+\frac{1}{1+0} = 4.$

c) A bal oldali limesz $-\infty$, a jobb oldali ∞.

6. *Hol folytonosak az alábbi függvények? Állapítsuk meg a szakadási helyeik típusát!*

a) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$ *b)* $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$

c) $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$ *d)* $f(x) = \frac{5x^2-3x}{2x}$

Megoldás: a) A függvény folytonos, ahol a nevező nem 0, azaz $x \neq -2, -3$ esetén. -2-ben és -3-ban nincs értelmezve, és az $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+2)}$ felbontásból látszik, hogy 2-ben a függvény a bal, illetve a jobb oldalról ∞-hez, illetve $-\infty$-hez tart, -3-ban pedig 4-hez. Tehát a függvénynek -2-ben lényeges szingularitása (azon belül pólusa) van, -3-ban pedig hézagpontja.

b) $\dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{1}{(x-3)(x+3)}$, tehát a függvénynek ± 3-ban van szakadási pontja, és mindkettő pólus, mert a függvény egyik és másik oldali limesze itt $\pm\infty$.

c) A függvény egyetlen szakadási helye $x = -1$. Ott a limesze balról $3^{-\infty} = 0$, jobbról pedig $3^{\infty} = \infty$. Tehát a függvénynek itt lényeges szingularitása van.

d) $x = 0$ az egyetlen szakadási pont, és ott a limesz $-\frac{3}{2}$, tehát a függvénynek az $x = 0$ hézagpontja.

7. *Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy az $f(x)$ függvény mindenhol folytonos legyen!*

a) $f(x) = \begin{cases} x & ha\ |x| \le 1 \\ x^2+ax+b & ha\ 1 < |x| \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & ha\ x \le 0 \\ ax+b & ha\ 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} & ha\ 1 \le x \end{cases}$

Megoldás: a) Az $f(x)$ három részét alkotó függvények folytonosak, így f-nek legfeljebb ezek találkozási helyénél, ± 1-nél lehet szakadása. -1-ben a függvényérték -1, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} x = -1$, és $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} x^2+ax+b = 1+a+b$, tehát itt akkor folytonos, ha $1-a+b = -1$. A másik helyen, $x = 1$-ben a függvényérték 1, a bal oldali határérték $1+a+b$, a jobb oldali pedig 1, tehát akkor folytonos itt az f függvény, ha $1+a+b = 1$. A két egyenletből azt kapjuk, hogy $a = 1$ és $b = -1$.

b) Az a) részhez hasonlóan a folytonos függvénydarabok találkozásánál kell megnézni az egyoldali limeszeket és a függvényértékeket. 0-ban ebből $-1 = b$, 1-ben pedig $a+b = 1$ következik, tehát $a = 2$ és $b = -1$.

8. *Határozzuk meg az alábbi függvények asszimptotáinak egyenletét:*

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ *b)* $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ *c)* $f(x) = \dfrac{2x^3+7x^2+3x-2}{x^2+2x+3}$

Megoldás: a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, és 0 az egyetlen szakadási hely, így legföljebb itt lehet függőleges aszimptotája a függvénynek. Mivel $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ (és $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$), f-nek az $x = 0$ függőleges aszimptotája. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|x|\sqrt{x^{-2}+1}}{x} = 1$, és ugyanezzel az átalakítással látszik, hogy $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1$, tehát $y = 1$ és $y = -1$ vízszintes aszimptoták.

b) $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, infty)$, és az értelmezési tartományon belül folytonos a függvény. A $d(f)$ határpontjain kell megvizsgálnunk a határértéket. $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty$, és $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \infty$, tehát $x = -1$ és $x = 1$ függőleges aszimptoták. Az a)-beli függvényhez hasonló átalakítással látjuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, és $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1$, tehát $y = -1$ és $y = 1$ vízszintes aszimptoták.

c) A függvény csak ott nem folytonos, ahol a nevező 0, de ennek a másodfokú polinomnak nincs valós gyöke, így $D(f) = \mathbb{R}$, és f mindenütt folytonos. Következésképpen nincs függőleges aszimptotája. $\pm\infty$-ben $\pm\infty$-hez tart, így vízszintes sincs. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7x^2+3x-2}{x^3+2x^2+3x} = 2 =: m$, és $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-3x-2}{x^2+2x+3} = 3 =: b$, tehát $y = mx+b = 2x+3$ ferde aszimptota a ∞-ben, és ugyanígy kiszámolható, hogy $-\infty$-ben is ez a függvény aszimptotája.