1. *Legyen $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, $g(x) = 0$ az origón kívül, és $f(0) = 0$, $g(0) = 1$. Jelöljük $f_1 \circ f_2$-vel az f_1 és f_2 függvények kompozícióját (összetett függvényét). Léteznek-e a $\lim\limits_{x\to 0}(f \circ g)(x)$ és $\lim\limits_{x\to 0}(g \circ f)(x)$ határértékek, és ha igen, mi az értékük?*

Megoldás:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \neq 0 \\ \cos 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad (g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } x = \frac{2}{(2k+1)\pi} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Tehát $f \circ g$ határértéke 0-ban 0, $g \circ f$-nek viszont nincs határértéke 0-ban, mert az $x_n = \frac{2}{(2k+1)\pi} \to 0$ sorozaton a függvényérték 1, és például az $x_n = \frac{1}{k\pi} \to 0$ sorozaton 0.

2. *Igazak-e az alábbi állítások?*

a) Ha f szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en, akkor $\lim\limits_{\infty} f = \infty$.

b) Ha f folytonos egy korlátos intervallumon, akkor ott egyenletesen is folytonos.

c) Zárt, korlátos intervallum folytonos függvény szerinti képe is zárt, korlátos intervallum.

d) Korlátos intervallumon korlátos függvény felveszi a maximumát.

Megoldás: a) Nem igaz, például az $\operatorname{arctg} x$ függvény szigorúan monoton növő az egész $\mathbb{R}$-en, de a ∞-ben vett limesze $\frac{\pi}{2}$.

b) Nem igaz, kell hozzá az intervallum zártsága is. Például az $\frac{1}{x}$ függvény folytonos a $(0, 1]$ intervallumon, de nem egyenletesen folytonos: $\varepsilon = 1$-hez nem tudunk közös δ-t találni, ugyanis $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+h} = \frac{h}{x(x+h)} > \frac{1}{2h} > 1$, ha $x < h$ és $h < \frac{1}{2}$, tehát δ nem jó a $\frac{\delta}{2}$-nél kisebb x-ekre.

3. *Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ függvény a $(0, 1]$ intervallumon?*

Megoldás: Igen, ugyanis az $f(x)$ folytonossá tehető úgy, hogy 0-ban értéket adunk neki: legyen $g(x) = f(x)$, ha $x \neq 0$, és $g(0) = \lim x \to 0 f(x) = 1$. Ez a g függvény folytonos a [0,1] korlátos, zárt intervallumon is, tehát ott egyenletesen folytonos. Ebből következik, hogy g a szűkebb $(0, 1]$ intervallumon is egyenletesen folytonos, ott viszont megegyezik f-fel, tehát f is egyenletesen folytonos a $(0, 1]$ intervallumon.

4. *a) Van-e megoldása a $\sin x - x + 1 = 0$ egyenletnek?*

b) Felveszi-e az $f(x) = -\cos \pi x + 2 + \frac{1}{4}x^3$ a 3 értéket a $[0, 1]$ intervallumon?

Megoldás: a) Igen, mert az $f(x) = \sin x - x + 1$ függvény folytonos $\mathbb{R}$-en, és $f(0) = 1 > 0$, viszont $f(3) = \sin 3 - 3 + 1 \leq 1 - 3 + 1 = -1 < 0$, tehát a Bolzano-tétel szerint valahol 0 és 3 között az f a 0 értéket is felveszi.

b) Igen, ugyanis f mindenütt folytonos (így $[0, 1]$-en is), továbbá $f(0) = -1 + 2 = 1 < 3$, és $f(1) = 1 + 2 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4} > 3$.

5. *Legyen f a $[0, 1]$ zárt intervallumon folytonos függvény, és legyen $f(0) = f(1) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy bármely $d \in (0, 1]$ valós számhoz megadható a függvény grafikonjának olyan húrja, amely d hosszúságú!*

Megoldás: A függvény origóból induló, $(x, f(x))$ végpontú húrjának a hossza $g(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2}$. A $g(x)$ függvény folytonos $[0, 1]$-en, $g(0) = 0$, és $g(1) = 1$, tehát $d \in (0, 1]$-hez van olyan $x_0 \in [0, 1]$, amelyre $g(x_0) = d$, és ez az x_0 nem lehet a 0, mert $g(0) = 0$, tehát valódi húrról van szó.

6. *Osszuk el maradékosan az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinommal, és ennek segítségével határozzuk meg az $f(x)/g(x)$ racionális törtfüggvény aszimptotáit!*

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $g(x) = x + 2$

b) $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 5x - 2$, $g(x) = x^3 - 3x + 2$

Megoldás: a) Horner-módszerrel:

	1	−3	1
−2	1	−5	11

Tehát $x^2 - 3x + 1 = (x+2)(x-5) + 11$. Ebből $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x - 5 + \dfrac{11}{x+2}$, és ennek a limesze -2^--ban $-\infty$ és -2^+-ban ∞, tehát $x = -2$ függőleges aszimptotája. ∞-ben és $-\infty$-ben pedig $\dfrac{f(x)}{g(x)} - (x-5) = \dfrac{11}{x+2} \to 0$, ezért $y = x - 5$ ferde aszimptotája a törtfüggvénynek mindkét végtelenben.

b)

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & (x^4 & -x^3 & -2x^2 & +5x & -2) & : & (x^3-3x+2) & = & x-1 \\
- & (x^4 & & -3x^2 & +2x) & & & & & \\
 & & (-x^3 & +x^2 & +3x & -2) & & & & \\
 & - & (-x^3 & & +3x & -2) & & & & \\
 & & & (x^2) & & & & & &
\end{array}$$

Tehát $f(x) = g(x)(x-1) + x^2$, és ebből $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x - 1 + \dfrac{x^2}{x^3 - 3x + 2}$. Ebből leolvasható, hogy $\pm\infty$-ben a törtfüggvénynek ferde aszimptotája az $y = x - 1$, és függőleges aszimptotája ott van, ahol a tört nevezője 0, ugyanis x^2 a $g(x)$ gyökeinél biztosan nem 0, tehát az $\dfrac{x^2}{x^3 - 3x + 2}$ ezeken a helyeken (jobb-, illetve bal oldalról) $\pm\infty$-hez tart. Könnyen látható, hogy 1 gyöke $g(x)$-nek, és ha az $(x-1)$-et kiemeljük, akkor a $g(x) = (x-1)(x^2+x-2)$ szorzat tovább bontható $g(x) = (x-1)^2(x+2)$ alakra, tehát a törtfüggvénynek $x = 1$ és $x = -2$ a függőleges aszimptotái.

7. *Határozzuk meg a következő polinomok racionális gyökeit a racionális gyökteszt segítségével, majd az összes komplex gyöküket is a racionális gyöktényezők kiemelése után!*

a) $2x^3 - 3x^2 + 1$ *b)* $2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ *c)* $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$

Megoldás: a) A racionális gyökteszt szerint a racionális gyökök azon $\frac{p}{q}$ hányadosok közül kerülnek ki, amelyekre $p = \pm 1$ és $q = 1, 1$, tehát $\pm 1, \pm\frac{1}{2}$ jön csak szóba. Horner-módszerrel ellenőrizzük, és egyúttal kiemeljük a megtalált gyökökhöz tartozó gyöktényezőket.

	2	−3	0	1
1	2	−1	−1	0
1	2	1	0	

Így $2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2(2x+1)$, tehát a polinom gyökei $x_{1,2} = 1$ és $x_3 = -\frac{1}{2}$.

b) A racionális gyökteszt miatt olyan racionális szám lehet gyöke ennek a polinomnak, amelynek a számlálója és a nevezője is osztója 2-nek, tehát $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}$. Ebből ± 1 és 2 ránézésre nem gyök.

	2	3	2	−2
−2	2	−1	4	−10
$\frac{1}{2}$	2	4	4	0

(Szürkék azok a sorok, ahol nem találtunk gyököt, így nem is tudtunk gyöktényezőt kiemelni.) Azt kaptuk, hogy $2x^3+3x^2+2x-2=(x-\frac{1}{2})(2x^2+4x+4)=2(x-\frac{1}{2})(x^2+2x+2)$. A másodfokú polinom gyökeit már megoldóképlettel is meghatározhatjuk. Ennek a gyökei $-1\pm i$. Tehát az eredeti polinom gyökei $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{2,3}=-1\pm i$.

c) A racionális gyökteszt alapján tudjuk, hogy ennek a polinomnak csak ± 1 és ± 3 a lehetséges racionális gyökei. Könnyen látható, hogy -1 valóban gyök.

	1	5	7	3
−1	1	4	3	0

Ebből $x^3+5x^2+7x+3=(x+1)(x^2+4x+3)$, és a második tényező gyökei -1 és -3. Tehát az x^3+5x^2+7x+3 polinom gyökei $x_{1,2}=-1$ és $x_3=-3$.

8. *Milyen aszimptotái vannak a* $\dfrac{2^x+3^x}{2^x-3^{x+2}}$ *függvénynek?*

Megoldás: Szakadása van ott, ahol $2^x=3^{x+2}$, azaz $\left(\frac{2}{3}\right)^x=9$, ez pedig $x=\log_{2/3}9=\frac{\ln 9}{\ln(2/3)}$. Itt függőleges aszimptotája van, mert a nevező 0, a számláló viszont nem. $+\infty$-ben a limesz $\frac{\infty}{-\infty}$ alakú, tehát a leggyorsabban ∞-hez tartó tagot emeljük ki a számlálóból és a nevezőből. $\dfrac{2^x+3^x}{2^x-3^{x+2}}=\dfrac{3^x((2/3)^x+1)}{3^x((2/3)^x-9)}=\dfrac{(2/3)^x+1}{(2/3)^x-9}$, ami $-\frac{1}{9}$-hez tart. $-\infty$-ben $\frac{0}{0}$ alakú limeszt kapunk, ezért a leglassabban 0-hoz tartó tagot emeljük ki. $\dfrac{2^x+3^x}{2^x-3^{x+2}}=\dfrac{2^x(1+(3/2)^x)}{2^x(1-9\cdot(3/2)^x)}=\dfrac{1+(3/2)^x}{1-9\cdot(3/2)^x}$, ami $-\infty$-ben 1-hez tart. Tehát $y=-\frac{1}{9}$ és $y=1$ aszimptotái a függvénynek a végtelenekben.

9. *Számítsuk ki a következő limeszeket!*

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-4}{x-2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 3x}$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2}\cdot\ln 2=\ln 2.$$

A $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-4}{x-2}$ limesznél az x változót helyettesíthetjük a folytonos és invertálható $x=u+2$ függvénnyel, és így 0-beli limeszt kell kiszámítanunk. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-4}{x-2}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{2^{u+2}-4}{u}=\lim\limits_{u\to 0}4\cdot\dfrac{2^u-1}{u}=4\ln 2$ az előző feladat szerint.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}\cdot x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

10. *Ábrázoljuk vázlatosan az* $f(x)=\dfrac{e^{1/x}}{e-e^{1/x}}$ *függvényt a* $\pm\infty$*-ben és a szakadási helyeken vett jobb, illetve bal oldali határértékek meghatározása alapján!*

11. *Van-e páros, illetve páratlan függvény az alábbiak között? Hol van szakadása a megadott függvényeknek? Fejezzük ki a függvényeket az exponenciális függvény segítségével!*

$$\frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x} \qquad 1-\operatorname{cth}^2 x \qquad e^{-x}(\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x)$$

12. *Invertálhatók-e az alábbi függvények? Ha igen, határozzuk meg az inverzüket! Adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát is! Ha valamelyik függvény nem invertálható, akkor van-e olyan intervallum, amelyen invertálható?*

a) $(x+2)^3-3$ *b)* $\dfrac{x+1}{x-2}$ *c)* $\dfrac{x}{|x|}$ *d)* $\sqrt{x^2+2x+2}$ *e)* $\sqrt{3x-2}$