1. *Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét (ha léteznek)!*

a) $\arccos -\frac{1}{\sqrt{2}}$ *b)* $\arcsin(\sin -\frac{10\pi}{3})$ *c)* $\operatorname{tg}(\arccos \frac{1}{3})$

d) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 8)$ *e)* $\sin(\arcsin(-2))$ *f)* $\operatorname{arch}((1+e^8)/2e^4)$

g) $\operatorname{arth} 5$ *h)* $\operatorname{arcth} 5$ *i)* $\arccos(\cos(2\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})))$

Megoldás: a) $\arccos -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4}$

b) $\arcsin(\sin -\frac{10\pi}{3}) = \arcsin(\sin \frac{2\pi}{3}) = \arcsin(\sin \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$

c) $\operatorname{tg}(\arccos \frac{1}{3}) = 2\sqrt{2}$ (az 1 befogójú, 3 átfogójú derékszögű háromszögből).

d) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 8) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(8-3\pi)) = 8-3\pi$, ugyanis a tangens függvény periódusa π, és $-\frac{\pi}{2} < 8-3\pi < \frac{\pi}{2}$.

e) $\sin(\arcsin(-2))$ nincs értelmezve.

f) $\operatorname{arch}((1+e^8)/2e^4) = x$, ha $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = \dfrac{1+e^8}{2e^4} = \dfrac{e^4+e^{-4}}{2}$, és $x \geq 0$. Ennek nyilvánvaló megoldása az $x = 4$, más pedig nem lehet, minthogy $\operatorname{ch} x$ a $[0,\infty]$-en invertálható. Így $\operatorname{arch}((1+e^8)/2e^4) = 4$.

g) $\operatorname{arth} 5$ nincs értelmezve, mert az arth értelmezési tartománya $(-1,1)$ (ugyanis $\left|\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right| < 1$).

h) Az $\operatorname{arcth} 5 = x$, azaz $\operatorname{cth} x = 5$ egyenletet kell megoldani. Átírva e^x-re, és az egyenletet átrendezve a $4e^x = 6e^{-x}$, azaz $e^{2x} = \frac{3}{2}$ egyenletet kapjuk, amiből $x = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

i) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$, $\cos(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, és $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Tehát $\arccos(\cos(2\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}))) = \frac{\pi}{3}$

2. *Bizonyítsuk be a következő azonosságokat!*

a) $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ *b)* $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$

c) $\operatorname{arsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ *d)* $\operatorname{arch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

e) $\operatorname{sh}\operatorname{arch} x = \sqrt{x^2-1}$

Megoldás: a) $2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2\cdot\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = \dfrac{(e^x)^2-(e^{-x})^2}{2} = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x.$

b) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^2x+e^{-2x}+2}{4} + \dfrac{e^2x+e^{-2x}-2}{4} = \dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch} 2x$

c) $\operatorname{arsh} x = y$, ha $x = \operatorname{sh} y = \frac{e^y-e^{-y}}{2}$. Ez átrendezés után e^y-ra ad egy másodfokú egyenletet: $(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$, amelynek a megoldása $e^y = \dfrac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2} = x\pm\sqrt{x^2+1}$. Mivel $e^y > 0$ minden y-ra, csak az $e^y = x+\sqrt{x^2+1}$ megoldás lehet jó, azaz $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

d) $\operatorname{arch} x = y$, ha $x = \operatorname{ch} y = \frac{e^y+e^{-y}}{2}$, és $y \geq 0$. e^y-ra az $(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek a megoldása $e^y = x\pm\sqrt{x^2-1}$, de a két megoldás közül csak $x+\sqrt{x^2-1}$ nagyobb vagy egyenlő 1-gyel, ez is csak $x \geq 1$ esetén (a logaritmusának pozitívnak kell lennie), tehát $y = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$. Így $\operatorname{arch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$, ahol $x \geq 1$.

e) $\operatorname{sh}(\operatorname{arch} x) = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{arch} x) - 1} = \pm\sqrt{x^2-1}$, de $\operatorname{arch} x$ értelmezési tartománya $[0,\infty)$, és ott sh is nemnegatív, ezért $\operatorname{sh}(\operatorname{arch} x) = \sqrt{x^2-1}$.

3. *a) Határozzuk meg az* $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1}$ *függvény aszimptotáit!*

b) Ábrázoljuk az $\arcsin(\sin x)$ *függvényt!*

c) Van-e abszolút maximuma, illetve minimuma az $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$ *függvénynek az értelmezési tartományán? És az* $\operatorname{arch}(\cos x)$ *függvénynek?*

Megoldás: a) Függőleges aszimptotája legföljebb az egyetlen szakadási pontjában lehet, $x = -1$-ben. De a függvény jobb oldali limesze itt $\frac{\pi}{2}$, a bal oldali pedig $-\frac{\pi}{2}$, tehát nincs függőleges aszimptotája. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1} = \operatorname{arctg} 0 = 0$, ezért az $y = 0$ aszimptotája a függvénynek ∞-ben és $-\infty$-ben is.

b) $\arcsin(\sin x) = x$, ha $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. A $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ intervallumon $\arcsin(\sin x) = \pi - x$. Mivel a $\sin x$ függvény periodikus 2π periódussal, az $\arcsin(\sin x)$ függvénynek is periódusa a 2π, tehát a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$-n megadott töröttvonalat kell ismételgetni az egész számegyenesen, vagyis a $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2})$ és $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2})$ $(k \in \mathbb{Z})$ pontokat összekötő töröttvonal az $\arcsin(\sin x)$ függvény grafikonja.

c) Az $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ mindenütt értelmezve van, és értékkészlete $(0, 1]$, mert $\operatorname{ch} x$ értékkészlete $[1, \infty)$. Az arctg függvény szigorúan monoton növő a $(0, 1]$ intervallumon, tehát értékkészletét meghatározza a végpontokban fölvett értéke, 0, illetve $\frac{\pi}{4}$. Ezért az $\operatorname{arctg}(\frac{1}{\operatorname{ch} x})$ függvény értékkészlete $(0, \frac{\pi}{4}]$, következésképpen a függvénynek abszolút maximuma a $\frac{\pi}{4}$, abszolút minimuma viszont nincs.

A $\cos x$ értékkészlete $[-1, 1]$, de ezen az intervallumon csak 1-ben van értelmezve az $\operatorname{arch} x$ függvény, ahol 0-t vesz föl. Így az $\operatorname{arch}(\cos x)$ függvény értékkészlete $\{1\}$, és így a függvénynek 1 az abszolút maximuma és az abszolút minimuma is.

4. *Van-e deriváltja a következő függvényeknek a 0-ban? Ha igen, számítsuk ki a deriváltat!*

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ *b)* $f(x) = x \cdot |x|$ *c)* $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

Megoldás: a) $f'(x) = (x^{2/3})' = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ nincs értelmezve a 0-ban, így a derivált definícióját kell használnunk. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{2/3} - 0^{2/3}}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$, és ennek a limesznek nincs véges értéke, így a függvény nem deriválható 0-ban.

b) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} |x| = 0$.

c) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} e^{-1/x^2} = \lim\limits_{y\to\pm\infty} y e^{-y^2} = \lim\limits_{y\to\pm\infty} \dfrac{y}{e^{y^2}} = \lim\limits_{y\to\pm\infty} \dfrac{1}{2ye^{y^2}} = 0$ (a L'Hospital-szabály felhasználásával).

5. *Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltfüggvényét!*

a) $\dfrac{1}{x} + \sqrt{x^5}$ *b)* $\dfrac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$ *c)* $\dfrac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$

d) $x^3 e^x$ *e)* $(x^2 + e^{-x}) \sin x$ *f)* $\dfrac{1}{\sin x} - 4\sqrt{x} + 7$

g) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ *h)* $\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ *i)* $\sin x \cos x$

j) $\left(1 - \dfrac{x}{7}\right)^{-7}$ *k)* $\dfrac{1}{\cos(\operatorname{tg} x)}$ *l)* $\sin^3 x$

m) $\cos^4(1 - 2x)$ *n)* $\dfrac{1}{(x^2 - 3x + 2)^2}$ *o)* $4 \sin\sqrt{1 + \sqrt{x}}$

p) $\sqrt{\dfrac{x^2 + x}{x^2}}$ *q)* $\operatorname{arctg}(1 - x^2)$ *r)* $\arcsin(\sin x)$

s) $\sqrt{1 + \operatorname{ch}(2x)}$ *t)* $x \operatorname{arsh}(2x + 1)$ *u)* 2^{3x^2+1}

Megoldás: a) $\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{x^5}\right)' = (x^{-1} + x^{5/2})' = -x^{-2} + \dfrac{5}{2}x^{3/2}$

b) $\left(\dfrac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}\right)' = (x^{-1} + 1 - 4x^{-1/2})' = -x^{-2} + 2x^{-3/2}$

c) $\left(\dfrac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}\right)' = \left(\dfrac{1}{x^4+x^3-x-1}\right)' = \dfrac{-4x^3-3x^2+1}{(x^4+x^3-x-1)^2}$

d) $(x^3e^x)' = (3x^2+x^3)e^x$

e) $\big((x^2+e^{-x})\sin x\big)' = (2x-e^{-x})\sin x + (x^2+e^{-x})\cos x$

f) $\left(\dfrac{1}{\sin x} - 4\sqrt{x}+7\right)' = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

g) $(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \dfrac{4}{\sin^2 2x}$, vagy másképpen,

$(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)' = \left(\dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x \sin x}\right)' = (-2\operatorname{ctg} 2x)' = \dfrac{4}{\sin^2 2x}$

h) $\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)' = \dfrac{(\cos x)(1-\sin x) - (1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \dfrac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$

i) $(\sin x\cos x)' = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

j) $\left(\left(1-\dfrac{x}{7}\right)^{-7}\right)' = -7\left(1-\dfrac{x}{7}\right)^{-8}\cdot\left(-\dfrac{1}{7}\right) = \left(1-\dfrac{x}{7}\right)^{-8}$

k) $\left(\dfrac{1}{\cos(\operatorname{tg} x)}\right)' = \dfrac{\sin(\operatorname{tg} x)\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos^2(\operatorname{tg} x)} = \dfrac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\cos^2(\operatorname{tg} x)\cos^2 x}$

l) $(\sin^3 x)' = 3\sin^2 x\cos x$

m) $(\cos^4(1-2x))' = 4\cos^3(1-2x)(-\sin(1-2x))\cdot(-2) = 8\cos^3(1-2x)\sin(1-2x)$

n) $\left(\dfrac{1}{(x^2-3x+2)^2}\right)' = \big((x^2-3x+2)^{-2}\big)' = -2(x^2-3x+2)^{-3}(2x-3)$

o) $\left(4\sin\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)' = 4\left(\cos\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)\dfrac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$

p) $\left(\sqrt{\dfrac{x^2+x}{x^2}}\right)' = \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^4+x^3}}$

q) $\big(\operatorname{arctg}(1-x^2)\big)' = \dfrac{1}{1+(1-x^2)^2}(-2x) = -\dfrac{2x}{x^4-2x^2+2}$

r) $(\arcsin(\sin x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cos x = \dfrac{\cos x}{|\cos x|}$, ami 1, ha $x\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$ valamely $k\in\mathbb{Z}$-re, és -1, ha $x\in(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi)$ valamely $k\in\mathbb{Z}$-re (v.ö. 3.b))

s) $\left(\sqrt{1+\operatorname{ch}(2x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\operatorname{ch}(2x)}}\operatorname{sh}(2x)\cdot 2 = \dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{\sqrt{1+\operatorname{ch}(2x)}}$, vagy a függvényt előbb átalakítva: $\left(\sqrt{1+\operatorname{ch}(2x)}\right)' = (\sqrt{2\operatorname{ch}^2 x})' = (\sqrt{2}\operatorname{ch} x)' = \sqrt{2}\operatorname{sh} x$. (Ellenőrizzük, hogy ez megegyezik az előbbi eredménnyel!

6. *Teljesülnek-e a Lagrange-féle középértéktétel feltételei az alábbi függvényekre a megadott intervallumon? Ha igen, keressünk az intervallum belsejében olyan pontot, amelyhez tartozó érintő párhuzamos a görbedarab végpontjait összekötő húrral!*

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ *a* $[-1,8]$*-on* *b)* $f(x) = x^3-3x+1$ *az* $[1,2]$*-n*

Megoldás: a) $f(x)$ nem differenciálható 0-ban (ld. 4.a)), tehát nem teljesülnek a Lagrange-tétel feltételei. Ettől még létezhetne olyan hely a $(-1,8)$ intervallumban, ahol a derivált $\frac{f(8)-f(-1)}{8-(-1)} = \frac{1}{3}$ (csak a Lagrange-tételből nem következik), de $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-1/3}$ csak 8-ban egyenlő $\frac{1}{3}$-dal.

b) f mindenütt differenciálható és így folytonos is, ezért teljesülnek a Lagrange-tétel feltételei. $f'(x) = 3x^2-3 = \frac{f(2)-f(1)}{2-1}$, ha $3x^2-3=4$, azaz $x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$, és ezek közül $\sqrt{\frac{7}{3}}\in(1,2)$.

7. *Számítsuk ki a deriváltakat a logaritmus függvény segítségével!*

a) $\dfrac{x^3(x+1)\sin x}{2x^2+1}$ *b)* $x^{\sin x}$ *c)* $(x+1)^{\ln x}$

Megoldás: a) $\ln|f(x)| = 3\ln|x| + \ln|x+1| + \ln|\sin x| - \ln|2x^2+1|$ minden olyan x-re, ahol egyik faktor sem 0. Vegyük mindkét oldal deriváltját. (Felhasználjuk, hogy $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$, tehát $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, ahol a függvény értelmezve van.) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{4x}{2x^2+1}$, így $f'(x) = \dfrac{x^3(x+1)\sin x}{2x^2+1}\cdot\left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{4x}{2x^2+1}\right)$.

b) $\left(x^{\sin x}\right)' = \left(e^{\sin x \ln x}\right)' = e^{\sin x\ln x}(\cos x\ln x + \frac{1}{x}\sin x) = x^{\sin x}(\cos x\ln x + \frac{1}{x}\sin x)$.

c) $\left((x+1)^{\ln x}\right)' = \left(e^{(\ln x)\ln(x+1)}\right)' = e^{(\ln x)\ln(x+1)}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x} + \dfrac{\ln x}{x+1}\right) =$
$(x+1)^{\ln x}\left(\frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{\ln x}{x+1}\right)$

8. *Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + 3x - 5$ függvény inverz függvényének érintőjét a $(-1,1)$ pontban!*

Megoldás: $f'(x) = 3x^2 + 3$, $f'(1) = 6$, tehát f érintőjének meredeksége az $(1,-1)$ pontban 6, ezért az inverz függvény érintőjének meredeksége a $(-1,1)$ pontban $\frac{1}{6}$, az érintő egyenlete pedig $y - 1 = \frac{1}{6}(x+1)$, azaz $y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$. A meredekséget úgy is kiszámíthattuk volna, hogy használjuk a g inverz függvény deriváltjára a $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ képletet: $g'(-1) = \dfrac{1}{f'(g(-1))} = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{6}$.

9. *Írjuk fel az $x^3 + xy - y^3 = 1$ görbe érintőjének egyenletét az $(1,1)$ pontban!*

Megoldás: Deriváljuk le a függvényegyenlet mindkét oldalát x szerint (y-t az x függvényének tekintve): $3x^2 + y + xy' - 3y^2y' = 0$. Az $x = 1$, $y = 1$ helyen az $m = y'(1)$ meredekségre behelyettesítéssel a $3 + 1 + m - 3m = 0$ egyenletet kapjuk, amiből $m = 2$, és az érintő egyenlete $y - 1 = 2(x-1)$, azaz $y = 2x - 1$.