1. *Számítsuk ki az alábbi limeszeket, ahol lehet, a L'Hospital-szabály segítségével! Mindig ellenőrizzük, hogy alkalmazható-e a L'Hospital-szabály!*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sqrt{1+x}}{x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xe^x}{e^x + x}$ *c)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{1/x} - 1}{2\operatorname{arctg} x - \pi}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}(\pi x)$ *e)* $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x \ln(-x)$ *f)* $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1 + \ln(\sin x)}$ *h)* $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x$ *i)* $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$

Megoldás: a) ($\frac{0}{0}$ alakú) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sqrt{1+x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}}{1} = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$

b) ($\frac{\infty}{\infty}$ alakú) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xe^x}{e^x + x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)e^x}{e^x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+2)e^x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} x + 2 = \infty$

c) ($\frac{0}{0}$ alakú) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{1/x} - 1}{2\operatorname{arctg} x - \pi} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}}{\frac{2}{1+x^2}} = -\dfrac{1+x^2}{2x^2}e^{1/x} = -\dfrac{1}{2}$

d) ($0\cdot(\pm\infty)$ alakú, ami átrendezéssel $\frac{0}{0}$-vá alakítható) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}(\pi x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\pi x) - \pi x\sin(\pi x)}{\pi\cos(\pi x)} = \dfrac{1}{\pi}$, de ennél egyszerűbb, ha a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ limeszt használjuk: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{\pi x}{\sin(\pi x)} \cdot \cos(\pi x) = \dfrac{1}{\pi}$

e) ($\frac{\infty}{\infty}$-né alakítható $0\cdot\infty$ alakú) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x \ln(-x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(-x)}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{-e^{-x}} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

f) Közös nevezőre hozás után $\frac{0}{0}$ alakú limeszt kapunk (felhasználva azt is, hogy $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln x = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{1/(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1/x}{-1/(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{-(x-1)^2}{x} = 0$:

$\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - x^2 + x}{(x-1)\ln x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x} - 2x + 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-\frac{1}{x^2} - 2}{\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{-3}{3} = -1$

g) ($\frac{\infty}{\infty}$ alakú) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1 + \ln(\sin x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{\cos x/\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 1$

h) $(\sin x)^x = e^{x\ln(\sin x)}$. A kitevő limesze: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\sin x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin x)}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x/\sin x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x\cos x \cdot \dfrac{x}{\sin x} = 0$, így $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x = e^0 = 1$

i) $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = \lim\limits_{x\to (\pi/2)^-} (\operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{y\to\infty} y^{1/y} = 1$, az $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, helyettesítést használva, amelynek limesze $(\pi/2)^-$-ban valóban $\frac{1}{0^+} = \infty$. De exponenciális alakra hozva a függvényt, a határérték visszavezethető a $\operatorname{ctg} x \ln(\operatorname{tg} x)$ kitevő határérékére, amely a L'Hospital-szabály segítségével kiszámítható: $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^-} \operatorname{ctg} x\ln(\operatorname{tg} x) = \lim\limits_{x\to (\pi/2)^-} \dfrac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{x\to (\pi/2)^-} \dfrac{(\operatorname{ctg} x)\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to (\pi/2)^-} \operatorname{ctg} x = 0$,

2. *a) Tegyük fel, hogy f folytonos az I intervallumon, és szigorúan monoton növő az I belsejében. Bizonyítsuk be, hogy ekkor f a teljes I intervallumon szigorúan monoton növő!*

b) Tegyük fel, hogy f értelmezve van és szigorúan monoton növő az I és J egymástól nem diszjunkt intervallumokon. Bizonyítsuk be, hogy ekkor f a két intervallum unióján is szigorúan monoton növő!

Megoldás: a) Tegyük fel, hogy a az intervallum alsó határa, és legyen c az I belsejében. Ekkor van egy $d < c$ az I belsejében, és erre a feltétel szerint $f(d) < f(c)$, továbbá minden $a < x < d$-

re $f(x) < f(d)$, ezért $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) \leq f(d) < f(c)$. Ugyanígy bizonyítható, hogy ha I felső határa b, akkor minden az I belsejében levő c-re $f(c) < f(b)$. Végül, ha $I = [a, b]$, akkor $f(a) < f(b)$, mert egy tetszőleges $c \in (a, b)$-re $f(a) < f(c) < f(b)$.

b) Ha valamelyik intervallum része a másiknak, akkor nyilván igaz az állítás. Ha nem, akkor $I \setminus J$ és $J \setminus I$ diszjunkt intervallumok, tehát valamelyiknek az elemei kisebbek a másik összes eleménél, és $I \cap J$ a kettő között van. Feltehetjük, hogy $I \setminus J$ elemei a kisebbek. Azaz minden $x \in I \setminus J$-re, $y \in I \cap J$-re és $z \in J \setminus I$-re $x < y < z$. Ebből következik, hogy ha $x, z \in I \cup J = (I \setminus J) \cup (I \cap J) \cup (J \setminus I)$, és $x < z$, akkor vagy mindkettő benne van I és J egyikében, és akkor a feltétel miatt $f(x) < f(z)$, vagy $x \in I \setminus J$ és $z \in J \setminus I$, így tetszőleges $y \in I \cap J$ elemet választva $x < y < z$, amiből $f(x) < f(y) < f(z)$.

3. *Hol monoton növők, illetve fogyók az alábbi függvények?*

a) $\sqrt[3]{x+2}$ *b)* $\cos(\pi \sin x)$

Megoldás: a) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$-re $f'(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-2/3}$, ha $x \neq -2$, és ez pozitív $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$-n, ezért az f függvény szigorúan monoton növő a $(-\infty, -2)$ és a $(-2, \infty)$ intervallumokon. Minthogy $f(x)$ folytonos az egész számegyenesen, a 2.a) feladat szerint f szigorúan monoton növő a $(-\infty, -2]$ és $[-2, \infty)$ intervallumokon is, és akkor a 2.b) szerint a teljes $(-\infty, \infty)$ számegyenesen is.

b) $f(x) = \cos(\pi \sin x)$-re $f'(x) = -\pi \sin(\pi \sin x) \cos x$. $f'(x)$ folytonos az egész $\mathbb{R}$-en, és $f'(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\cos x = 0$ vagy $\sin(\pi \sin x)) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ valamely $k \in \mathbb{Z}$-re, tehát $f'(x)$ csak itt válthat előjelet. Minthogy $f(x)$-nek periódusa a 2π, elég a $[0, 2\pi]$ intervallumon megvizsgálni az $f'(x)$ előjelét, ez pedig a négy negyeden $+, -+, -$, így $f(x)$ szigorúan monoton növő a $[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ és $[\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ intervallumokon, és monoton fogyó a $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ és $[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ intervallumokon tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$-re (itt is használtuk a 2.a) feladat állítását).

4. *Adjuk meg azt a 0 kezdőpontú legbővebb intervallumot, ahol az xe^{-x} függvény invertálható!*

Megoldás: Az $f(x) = xe^{-x}$ folytonos, differeciálható függvényre $f'(x) = e^{-x} + xe^{-x}(-1) = (1-x)e^{-x}$, ami pozitív, ha $x < 1$, és negatív, ha $x > 1$. Ebből következik, hogy a függvény szigorúan monoton növő a $(-\infty, 1]$ intervallumon, és szigorúan monoton fogyó az $[1, \infty)$ intervallumon. Folytonos függvény csak akkor lehet invertálható, ha szigorúan monoton, tehát ezek maximális olyan intervallumok, ahol a függvény invertálható. Ezért a feladatnak megfelelő 0 kezdőpontú intervallum szükségképpen része az előbbi két intervallum egyikének, így csak $[0, 1]$ lehet.

5. *Igazoljuk, hogy $1 + x < e^x$, ha $x > 0$.*

Megoldás: Tekintsük az $f(x) = e^x - x - 1$ függvényt. Azt kell belátnunk, hogy ez a függvény pozitív a $(0, \infty)$ intervallumon. $f'(x) = e^x - 1$ pozitív, ha $x > 0$, tehát $f(x)$ szigorúan monoton növő a $(0, \infty)$ intervallumon, sőt a folytonossága miatt a $[0, \infty)$ intervallumon is, és $f(0) = 0$, ezért minden $x > 0$-ra $f(x) > f(0) = 0$

6. *Hány valós gyöke van a $3x^5 - 20x^3 + 60x + 7 = 0$ egyenletnek?*

Megoldás: $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 60x + 7$-re $f'(x) = 15x^4 - 60x^2 + 60 = 15(x^2 - 2)^2$, így $f'(x)$ 0-helyei $\pm\sqrt{2}$, és csak ezek között válthat előjelet.

$x:$	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		∞
f'		$+$		$-$		$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			MAX		*MIN*		
$f:$	$-\infty$		$32\sqrt{2}+7$		$-32\sqrt{2}+7$		∞

Ebből leolvasható, hogy a függvénynek mindhárom részintervallumban (a belsejében) egyetlen gyöke van, így összesen három valós gyöke van a polinomnak.

7. *Magasabbrendű deriváltak segítségével állapítsuk meg, van-e lokális szélsőértéke, és ha igen, milyen, a következő függvényeknek az $x_0 = 0$ pontban?*

a) $\cos x - 2x^2$ *b)* $\operatorname{ch} x + \cos x$

Megoldás: a) $f(x) = \cos x - 2x^2$-re

$f'(x) = -\sin x - 4x$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x - 4$ $f''(0) = -5$,

így 0-ban lokális maximuma van $f(x)$-nek.

b) Az $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$ függvényre

$f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x$ $f''(0) = 0$

$f'''(x) = \operatorname{sh} x + \sin x$ $f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$ $f^{(4)}(0) = 2$.

Mivel a derivált 0, és az első nem nulla derivált párosadik (negyedik), van szélsőérték ebben a pontban, s minthogy ez a derivált pozitív, lokális minimum van a 0-ban.

8. *Keressük meg az $f(x)$ függvény abszolút szélsőértékeit a megadott intervallumon!*

a) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$, $[-6, 6]$ *b)* $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $[-1, 8]$

Megoldás: a) $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$ mindenhol értelmezve van, és 1-ben és -5-ben 0, ezért csak ez a két kritikus pont van a $[-6, 6]$ intervallumban. A függvény értékei ezeken a helyeken és a végpontokban $f(-6) = 93$, $f(-5) = 103$, $f(1) = -5$ és $f(6) = 345$. Ezek az értékek közül a legkisebb, -5 az abszolút minimum, a legnagyobb, 345 pedig az abszolút maximum az intervallumon.

b) $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ nincs értelmezve 0-ban, és sehol sem 0 az értéke, így a 0 az egyetlen kritikus pont $[-1, 8]$-ban. $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ és $f(8) = 4$, tehát 0 az abszolút minimum és 4 az abszolút maximum a megadott intervallumon.

9. *Bizonyítsuk be, hogy* $\dfrac{2}{3} \le \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1} \le 2$ *minden $x \in \mathbb{R}$-re!*

Megoldás: Vizsgáljuk meg az $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$ függvényt! $f(x)$ mindenütt folytonos (a polinomok folytonosak, és a nevező sehol sem 0), és $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$ csak a ± 1 pontokban válthat előjelet.

$x:$ $-\infty$	-1	1	∞
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
$f:$ 1	2	2/3	1

A részintervallumokban f monoton, tehát ezekben a szélsőértékeit csak a végpontokban veheti föl (vagy ha a $\pm\infty$-ben vett határérték lenne az, akkor nem is venné föl). Tehát az 1, 2, 2/3, 1 értékek közül kell kiválasztani a legnagyobbat és a legkisebbet, és megnézni, hogy azt felveszi-e a függvény, vagy csak limesze az az érték. Így 2 az abszolút maximum a teljes számegyenesen, és $\frac{2}{3}$ az abszolút minimum.

10. *Adott térfogatú hengerek közül melyiknek legkisebb a felszíne?*

Megoldás: Ha r a henger alapjának sugara, m pedig a henger magassága, akkor a henger térfogata $V = \pi m r^2$, a felszíne pedig $A = 2\pi r^2 + 2\pi r m = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$. Ezért az $f(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$ függvény abszolút minimumát kell megkeresni a $(0, \infty)$ intervallumon. $f'(r) = 4\pi r - 2Vr^{-2} = r^{-2}(4\pi r^3 - 2V) = 0$, ha $V = 2\pi r^3$, azaz $m = 2r$, és f' előtte negatív, utána pozitív, így itt $f(r)$ felveszi az abszolút minimumát. A felszín eszerint akkor minimális, ha a henger magassága megegyezik az alapjának az átmérőjével.

11. *Írjuk fel az $f(x)$ függvény n-edfokú Taylor-polinomját az x_0 pontban! Közelítsük a függvény értékét az x_1 pontban a Taylor-polinom segítségével, és a maradéktaggal becsüljük meg a közelítés hibáját!*

a) $f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = 0$, $n = 2$, $x_1 = 0.2$ *b)* $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $x_0 = 1$, $n = 3$

Megoldás: a)

$$\begin{array}{lll} f(x) = e^{x^2} & f(0) = 1 & a_0 = 1 \\ f'(x) = 2xe^{x^2} & f'(0) = 0 & a_1 = 0 \\ f''(x) = (2+4x^2)e^{x^2} & f''(0) = 2 & a_2 = 1 \\ f'''(x) = (12x + 8x^3)e^{x^2} & & \end{array}$$

Tehát a Taylor-polinom $T_2(x) = 1 + x^2$, a hibatag pedig $R_2(x) = \frac{1}{6}(12\xi + 8\xi^3)e^{\xi^2}x^3$. Mivel $f'''(x)$ monoton növő (és nemnegatív) a $[0, 0.2]$ intervallumon $x_1 = 0.2$-re ez felülről becsülhető az $\frac{1}{6}f'''(0.2)0.2^3 \leq \frac{1}{6}2.464e \cdot 0.008 < \frac{1}{6} \cdot 2.5 \cdot 3 \cdot 0.008 = 0.01$-gyel.

b)

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1 & f(1) = 3 & a_0 = 3 \\ f'(x) = 3x^2 + 6x - 2 & f'(1) = 7 & a_1 = 7 \\ f''(x) = 6x + 6 & f''(1) = 12 & a_2 = 6 \\ f'''(x) = 6 & f''(1) = 6 & a_3 = 1 \end{array}$$

Tehát $T_3(x) = 3 + 7(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)^3$ a harmadfokú Taylor-polinom az 1 körül. (Mellesleg, ez pontosan megegyezik az eredeti polinommal, mert az is harmadfokú, és csak egy olyan harmadfokú polinom van, amelyiknek a 0., 1., 2. és 3. derváltja is megegyezik a megadott függvény megfelelő deriváltjával.

12. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényekre ($D(f)$, folytonosság, paritás vagy periodicitás, tengelymetszetek, aszimptoták, monotonitás és szélsőértékek, konvexitás, konkávitás és inflexiós pontok, grafikon, $R(f)$).*

a) $f(x) = x^2 e^{1/x}$ *b)* $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

c) $f(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{x+1}$ *d)* $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

Megoldás: Az a) és c) feladat megoldása megvan a példatárban: a 11. fejezet 148. és 149. feladata. További függvényvizsgálati feladatok vannak megoldással együtt a `www.math.bme.hu/~lukacs/bboard/a1b/2012` címen a 9. feladatsorban.