1. *Számítsuk ki az $f(x) = x + 1$ függvényhez, a $[0, 1]$ intervallum $\Phi = \{\, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \,\}$ felosztásához és a $\{\, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5} \,\}$ reprezentánsrendszerhez tartozó integrálközelítő összeget!*

Megoldás: $f(\frac{1}{4})(\frac{1}{3}-0)+f(\frac{2}{5})(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})+f(\frac{4}{5})(1-\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{91}{60}$. (Mellesleg ez elég jó közelítés is: $\int_0^1 x + 1\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = \frac{3}{2}$.)

2. *Legyen $0 < a < b$, és $\Phi_n = \{\, a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, b \,\}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztássorozata, ahol $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.*

a) Bizonyítsuk be, hogy ez a felosztássorozat minden határon túl finomodó.

b) Számítsuk ki az $\int\limits_a^b \frac{1}{x}\,dx$ integrált az előbbi felosztássorozathoz tartozó felső közelítő összegek limeszeként.

Megoldás: a) Az intervallumok hossza $a(q-1) < aq(q-1) < \cdots < aq^{n-1}(q-1)$, ugyanis $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} > 1$. Tehát a felosztás finomsága $a(q^n - q^{n-1}) = a\left(\frac{b}{a} - \left(\frac{b}{a}\right)^{(n-1)/n}\right)$, és ez $a(\frac{b}{a} - \frac{b}{a}) = 0$-hoz tart, ha n tart ∞-hez

b) Mivel az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény monoton fogyó az $[a, b]$ intervallumon, a felső közelítő összeg reprezentáns rendszere a részintervallumok jobb végpontjaiból áll, és így a közelítő összegek $\frac{1}{a}a(q-1) + \frac{1}{aq}aq(q-1) + \ldots + \frac{1}{aq^{n-1}}aq^{n-1}(q-1) = n(q-1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1}{1/n}$, ezek limesze pedig megegyezik a következő függvénylimesszel: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)^x - 1}{x} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{b}{a}\right)^x\Big|_{x=0} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^x \cdot \ln\dfrac{b}{a}\Big|_{x=0} = \ln\dfrac{b}{a} = \ln b - \ln a$.

3. *Keressük meg azokat a c számokat, amelyek kielégítik a megadott függvényre és intervallumra vonatkozó integrál-középértéktételt!*

a) $f(x) = 3x^2 \qquad [-4, -1]$ *b)* $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \qquad [0, \frac{\pi}{4}]$

Megoldás: a) $\frac{1}{3}\int\limits_{-4}^{-1} 3x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-4}^{-1} = 21$, és $3x^2 = 21$, ha $x = \pm\sqrt{7}$, amelyek közül $c = -\sqrt{7}$ benne van a $[-4, -1]$ intervallumban.

b) $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{4}{\pi}\left[\operatorname{tg} x\right]_0^{\pi/4} = \frac{4}{\pi}$. Az $f(x) = \frac{4}{\pi}$, azaz $\cos^2 x = \frac{\pi}{4}$ egyenletnek pedig van megoldása a $[0, \frac{\pi}{4}]$ intervallumban, mivel $\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{\frac{\pi}{4}} < 1$, így $c = \arccos\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ megfelel.

4. *Határozzuk meg az alábbi deriváltak értékét!*

$\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx \qquad \frac{d}{db}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx \qquad \frac{d}{da}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx$

Megoldás: $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx = 0$, mert $\int\limits_a^b \sin x^2\,dx$ nem függ x-től.

$\frac{d}{db}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx = \sin b^2$ az integrálfüggvényről szóló tétel alapján.

$\frac{d}{da}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx = \frac{d}{da}\left(-\int\limits_b^a \sin x^2\,dx\right) = -\sin a^2$.

5. *Határozzuk meg a következőket!*

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x}$ *b)* $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{\arcsin x} \sqrt{\operatorname{tg} u}\,du$

Megoldás: a) Ez a limesz az $I(x)=\int\limits_0^x \cos^2 t\,dt$ integrálfüggvény 0-beli deriváltja, ezért az értéke $I'(0)=\cos^2 0=1$.

b) Legyen $I(x)=\int\limits_0^x \sqrt{\operatorname{tg} u}\,du$ integrálfüggvény. Ekkor $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\arcsin x}\sqrt{\operatorname{tg} u}\,du=\frac{d}{dx}I(\arcsin x)=$
$I'(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{\operatorname{tg}(\arcsin x)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{\sin(\arcsin x)}}{\sqrt{\cos(\arcsin x)}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{x}}{(1-x^2)^{3/4}}$.

6. *Hol folytonos és hol differenciálható az $I(x)=\int\limits_{-1}^{\infty} f(t)\,dt$ függvény, ha $f(x)=\operatorname{sgn} x$ az előjelfüggvény: 1, ha x pozitív, -1, ha x negatív, és $f(0)=0$?*

Megoldás: $x<0$-ra $I(x)=\int\limits_{-1}^{x}-1\,dt=\big[-t\big]_{-1}^{x}=-x-1$. $I(0)$ kiszámításához megváltoztathatjuk a függvényt úgy, hogy 0-ban -1 legyen, és ez nem változtatja meg az integrál értékét. Így $I(0)=\int\limits_{-1}^{0}-1\,dt=-1$. Végül $x>0$-ra $I(x)=\int_{-1}^{0}-1\,dt+\int_0^x 1\,dt=-1+\big[t\big]_0^x=x-1$. Így

$$I(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{ha } x\le 0\\ x-1, & \text{ha } x>0.\end{cases}$$

Ez nyilván minden $x\neq 0$ helyen folytonos, és 0-ban is az: $\lim\limits_{x\to 0^-}I(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-x-1=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}I(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x-1=-1$, és $I(0)=-1$. A differenciálhatóságot is csak 0-ban kell ellenőrizni. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{I(x)-I(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x-1+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}-1=-1$ és $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{I(x)-I(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$ különbözők, ezért $I(x)$ nem differenciálható 0-ban.

7. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!*

a) $\int 7x^4\,dx$	*b)* $\int (x+2)(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})\,dx$	*c)* $\int \frac{x^3-3x+4}{x^2}\,dx$
d) $\int \frac{x^3+x}{x+2}\,dx$	*e)* $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$	*f)* $\int (2x-3)^{100}\,dx$
g) $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$	*h)* $\int \sin x\cos x\,dx$	*i)* $\int \cos^3 x\,dx$
j) $\int \cos^4 x\,dx$	*k)* $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$	*l)* $\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx$
m) $\int \frac{\ln^2 x}{x}$	*n)* $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$	*o)* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$

Megoldás: a) $\int 7x^4\,dx=\frac{7}{5}x^5+C$

b) $\int (x+2)(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})\,dx=\int x^{3/2}+x^{4/3}+2x^{1/2}+2x^{1/3}\,dx=\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{3}{7}x^{7/3}+\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{3}{2}x^{4/3}+C$

c) $\int \frac{x^3-3x+4}{x^2}\,dx=\int x-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\,dx=\frac{1}{2}x^2-3\ln|x|-\frac{4}{x}+C$

d) $\int \frac{x^3+x}{x+2}\,dx=\int \frac{(x+2)(x^2-2x+5)-10}{x+2}\,dx=\int x^2-2x+5-\frac{10}{x+2}\,dx=$
$=\frac{1}{3}x^3-x^2+5x-10\ln|x+2|+C$

e) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int \frac{1}{\cos^2 x}-1=\operatorname{tg} x-x+C$

f) $\int (2x-3)^{100}\,dx=\frac{1}{101}(2x-3)^{101}\frac{1}{2}+C=\frac{1}{202}(2x-3)^{101}+C$

g) $\int e^{\cos x}\sin x\,dx=\int -e^{\cos x}(\cos x)'\,dx=-e^{\cos x}+C$

h) $\int \sin x\cos x\,dx=\int \sin x(\sin x)'\,dx=\frac{1}{2}\sin^2 x+C$

i) $\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

j) $\int \cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 dx = \int \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x\,dx =$
$\int \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

k) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \int \frac{(x^2+x-3)'}{x^2+x-3}\,dx = \ln|x^2+x-3| + C$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+4}\,dx = \int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{2}x+1)^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}x+1)\cdot 2 + C =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}x+1) + C$

m) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x} = \int (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$

n) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx = \ln(e^x+1) + C$

o) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-1}}\,dx = \operatorname{arch}(x+1) + C$

8. *Számítsuk ki az alábbi görbék által határolt korlátos síkidomok területét!*

a) $y = x^2,\ \ y = 1 - x^2$ *b)* $y = x^2,\ \ y = \dfrac{x^2}{2},\ \ y = x$

Megoldás: a) A két görbe az $x^2 = 1 - x^2$ egyenlet gyökeinél, tehát $\pm 1/sqrt2$-nél metszi egymást, és a két metszéspont között az $y = 1 - x^2$ függvény a nagyobb. Így a terület $\int\limits_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1-x^2) - x^2\,dx =$
$\left[x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

9. *Az* $\int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$ *képlet segítségével számítsuk ki az* $f(x) = \frac{4}{3}x^{3/2}$ $(0 \le x \le 2)$ *görbedarab ívhosszát!*

Megoldás: $f'(x) = 2\sqrt{x}$, így az ívhossz $\int\limits_0^2 \sqrt{1+4x}\,dx = \int\limits_0^2 (1+4x)^{1/2}\,dx = \left[\frac{2}{3}(1+4x)^{3/2}\cdot\frac{1}{4}\right]_0^2 =$
$\frac{1}{6}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{13}{3}$.