1. *Számítsuk ki helyettesítéssel az alábbi integrálokat!*

a) $\int e^{3x}\sqrt{e^x-1}\,dx$ *b)* $\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^5}\,dx$ *c)* $\int_1^9 \sqrt[3]{\sqrt{x}-2}\,dx$

Megoldás: a) $u=e^x-1$ helyettesítéssel $du=e^x\,dx$, így $\int e^{3x}\sqrt{e^x-1}\,dx=\int e^{2x}\sqrt{e^x-1}\,e^x\,dx=$ $\int (u+1)^2\sqrt{u}\,du=\int u^{5/2}+2u^{3/2}+u^{1/2}\,du=\frac{2}{7}u^{7/2}+\frac{4}{5}u^{5/2}+\frac{2}{3}u^{3/2}+C=$ $\frac{2}{7}(e^x-1)^{7/2}+\frac{4}{5}(e^x-1)^{5/2}+\frac{2}{3}(e^x-1)^{3/2}+C$

b) $u=x^2+1$ helyettesítéssel $du=2x\,dx$, és $\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^5}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{x^2}{(x^2+1)^5}\,2x\,dx=$ $\int_1^2 \frac{1}{2}\frac{u-1}{u^5}\,du=\int_1^2 \frac{1}{2}u^{-4}-\frac{1}{2}u^{-5}\,du=\left[-\frac{1}{6}u^{-3}+\frac{1}{8}u^{-4}\right]_1^2=\frac{11}{384}$

c) $u=\sqrt{x}-2$ helyettesítéssel $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, és $\int_1^9 \sqrt[3]{\sqrt{x}-2}\,dx=$ $\int_1^9 2\sqrt{x}\,\sqrt[3]{\sqrt{x}-2}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\int_{-1}^1 2(u+2)u^{1/3}\,du=\int_{-1}^1 2u^{4/3}+4u^{1/3}\,du=\left[\frac{6}{7}u^{7/3}+3u^{4/3}\right]_{-1}^1=$ $\frac{12}{7}$

2. *Trigonometrikus átalakítások segítségével számítsuk ki a következőket!*

a) $\int \cos^5 x\,\mathrm{tg}\,x\,dx$ *b)* $\int \frac{\sin 2x}{2-\sin^2 x}\,dx$ *c)* $\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\cos 4x}\,dx$ *d)* $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

Megoldás: a) $\int \cos^5 x\,\mathrm{tg}\,x\,dx=\int \cos^4 x\sin x\,dx=-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

b) $\sin 2x=2\sin x\cos x=-(2-\sin^2 x)'$, így $\int \frac{\sin 2x}{2-\sin^2 x}\,dx=-\ln(2-\sin^2 x)+C$

c) $\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\cos 4x}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{2(\cos^2 2x)}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{2}\cos 2x\,dx=$ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. (A négyzetgyök egyszerűsítésénél azért hagyhattuk el az abszolút érték jelet, mert 0 és $\frac{\pi}{4}$ között $\cos 2x\ge 0$.

d) $\int \frac{1}{\cos x}\,dx=\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx=\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$. Az $u=\sin x$ helyettesítéssel ez $\int \frac{1}{1-u^2}\,du=\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-u}\,du=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)+C.$

Másképp: $\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\,x\left(\frac{1}{\cos x}\right)$, és $(\mathrm{tg}\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, tehát $\left(\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\cos x}\right)'=$ $\left(\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\cos x}\right)\cdot\frac{1}{\cos x}$, ezért $\int \frac{1}{\cos x}\,dx=\int \frac{\left(\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\cos x}\right)'}{\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\cos x}}\,dx=\ln\left|\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\cos x}\right|+C.$

3. *Alkalmazzunk parciális integrálást az alábbi integráloknál!*

a) $\int (x+2)\cos x\,dx$ *b)* $\int x\ln x\,dx$ *c)* $\int_0^{1/2}\arcsin x\,dx$

d) $\int (x^2-x+2)e^{-x}\,dx$ *e)* $\int \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}\,dx$ *f)* $\int \ln^2 x\,dx$

g) $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ *h)* $\int \sin x\cos 5x\,dx$ *i)* $\int \mathrm{sh}\,x\sin x\,dx$

Megoldás: A megoldásokban a parciális integrálásnál aláhúzás mutatja, hogy az új integrálban melyik tényezőnek szerepel a deriváltja, míg a másik tényezőnek a primitív függvényét vesszük: $f(x)\underline{g(x)}\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$.

a) $\displaystyle\int \underline{(x+2)}\cos x\,dx = (x+2)\sin x - \int \sin x\,dx = (x+2)\sin x + \cos x + C$

b) $\displaystyle\int x\,\underline{\ln x}\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{x}x^2\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

c) $\displaystyle\int_0^{1/2} 1\cdot\underline{\arcsin x}\,dx = [x\arcsin x]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}]_0^{1/2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

d) $\displaystyle\int \underline{(x^2-x+2)}\,e^{-x}\,dx = (x^2-x+2)(-e^{-x}) - \int \underline{(2x-1)}\,(-e^{-x})\,dx =$ $-(x^2-x+2)e^{-x} - (2x-1)e^{-x} + \int 2e^{-x}\,dx = -(x^2-x+2)e^{-x} - (2x-1)e^{-x} - 2e^{-x} + C = -(x^2+x+3)e^{-x} + C$

e) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = \int 1\cdot\underline{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}\,dx = x\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \int x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = x\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

f) $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx = \int 1\cdot\underline{\ln^2 x}\,dx = x\ln^2 x - \int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln^2 x - \int 2\cdot\underline{\ln x}\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + \int 2x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$

g) $\displaystyle\int e^{2x}\,\underline{\cos 3x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \int \frac{1}{2}e^{2x}(-3\sin 3x)\,dx =$ $\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\,\underline{\sin 3x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int\frac{1}{2}e^{2x}3\cos 3x\,dx$. Ebből az ismeretlen $I = \displaystyle\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ integrálra az $I = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{9}{4}I$ egyenletet kapjuk. Így $I = \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x + C$. (*Más megoldás:* Tudjuk, hogy $e^{ax}\cos(bx)$-nek (és $e^{ax}\sin(bx)$-nek is) van $Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx)$ alakú primitív függvénye valamely $A, B \in \mathbb{R}$ együtthatókkal. Ha ezt a fügvényt lederiváljuk és összehasonlítjuk az integrandussal, akkor két kétváltozós lineáris egyenletet kapunk az A, B ismeretlenekre, és ebből az A és B együtthatókat kiszámíthatjuk. Ebben az esetben az $(Ae^{2x}\cos 3x + Be^{2x}\sin 3x)' = e^{2x}\cos 3x$ egyenlőségből $(2A+3B)e^{2x}\cos 3x + (-3A+2B)e^{2x}\sin 3x = e^{2x}\cos 3x$ adódik, tehát $2A + 3B = 1$, és $-3A + 2B = 0$, amiből $A = \frac{2}{13}$ és $B = \frac{3}{13}$.)

h) A g)-hez hasonló módon parciális integrálással is kiszámíthatjuk vagy a $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$ trigonometrikus összefüggés segítségével átalakíthatjuk az integrált: $\displaystyle\int \sin x\cos 5x\,dx = \int \frac{1}{2}\sin(6x) + \frac{1}{2}\sin(-4x)\,dx = \int \frac{1}{2}\sin(6x) - \frac{1}{2}\sin(4x)\,dx = -\frac{1}{12}\cos(6x) + \frac{1}{8}\cos(4x) + C$.

i) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,\underline{\sin x}\,dx = \operatorname{ch} x\sin x - \int \operatorname{ch} x\,\underline{\cos x}\,dx = \operatorname{ch} x\sin x - \operatorname{sh} x\cos x - \int \operatorname{sh} x\sin x\,dx$, tehát $I = \int \operatorname{sh} x\sin x\,dx$-re $I = \operatorname{ch} x\sin x - \operatorname{sh} x\cos x - I$, azaz $\int \operatorname{sh} x\sin x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{ch} x\sin x - \frac{1}{2}\operatorname{sh} x\cos x + C$.

4. *Trigonometrikus vagy hiperbolikus helyettesítéssel számítsuk ki a következő integrálokat!*

a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{15+2x-x^2}\,dx$

Megoldás: a) $\sqrt{x^2+4} = 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}$, így érdemes az $\frac{x}{2} = \operatorname{sh} u$, azaz $x = 2\operatorname{sh} u$, $dx = 2\operatorname{ch} u\,du$ helyettesítést elvégezni: $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \int 2\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\;2\operatorname{ch} u\,du = \int 4\operatorname{ch}^2 u\,du =$

$\int 2(\operatorname{ch} 2u+1)\,du = \operatorname{sh} 2u+2u+C = \operatorname{sh}\left(2\operatorname{arsh}\frac{x}{2}\right)+2\operatorname{arsh}\frac{x}{2}+C = 2\operatorname{sh}\left(\operatorname{arsh}\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh}\frac{x}{2}\right)+ 2\operatorname{arsh}\frac{x}{2}+C = x\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}+2\operatorname{arsh}\frac{x}{2}+C =$

b) $\sqrt{15+2x-x^2} = \sqrt{15-(x^2-2x)} = \sqrt{16-(x-1)^2} = 4\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{4}\right)^2}$, így az $\frac{x-1}{4} = \sin u$, azaz $x = 1+4\sin u$, $dx = 4\cos u\,du$ ($u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) helyettesítést alkalmazzuk:
$\int_1^5 \sqrt{15+2x-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 4\sqrt{1-\sin^2 u}\;4\cos u\,du = \int_0^{\pi/2} 16\cos^2 u\,du =$
$\int_0^{\pi/2} 8+8\cos 2u\,du = \left[8u+4\sin 2u\right]_0^{\pi/2} = 4\pi$. (Az integrálás új határait az $x=1 \Rightarrow u = \arcsin\frac{x-1}{4} = \arcsin 0 = 0$ és $x = 5 \Rightarrow u = \arcsin\frac{x-1}{4} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ összefüggésekből kaptuk.)

5. *Milyen alakú elemi törtfüggvényekre lehet felbontani az alábbi racionális törtfüggvényeket?*

a) $\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x-3)}$ *b)* $\frac{x+2}{x(x^2+2x+2)^2}$ *c)* $\frac{1}{(x^2-9)^2}$

Megoldás: a) $\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-3}$

b) $\frac{x+2}{x(x^2+2x+2)^2} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2}$

c) $\frac{1}{(x^2-9)^2} = \frac{1}{(x-3)^2(x+3)^2} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x+3}+\frac{D}{(x+3)^2}$

6. *Bontsuk fel a következő racionális törtfüggvényeket polinom és elemi törtfüggvények összegére, aztán számítsuk ki az integráljukat!*

a) $\frac{x^3+3x^2-x+2}{x^4+x^2}$ *b)* $\frac{x^3-2x+1}{(x+1)^3}$ *c)* $\frac{5x+3}{x^2-4x+5}\,dx$

Megoldás: a) $\frac{x^3+3x^2-x+2}{x^4+x^2} = \frac{x^3+3x^2-x+2}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1} =$
$\frac{A(x^3+x)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)}$. Az x-hatványok együtthatóit összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A+C &= 1\\ B+D &= 3\\ A &= -1\\ B &= 2. \end{aligned}$$

Ebből a paraméterek értéke: $A=-1$, $B=2$, $C=2$ és $D=1$, az integrál pedig: $\int -\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \int -\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\,dx =$
$-\ln|x| - \frac{2}{x}+\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg} x + C$.

b) $\int \frac{x^3-2x+1}{(x+1)^3}\,dx = \int 1-\frac{3}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^3}\,dx = x-3\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+C.$
(A parciális törtek együtthatóit megkaphatjuk az a) részben ismertetett módon, vagy pedig a számlálót többszörösen elosztathatjuk maradékosan $(x+1)$-gyel, akkor a maradékok rendre az $(x+1)^{-3}$, $(x+1)^{-2}$ és $(x+1)^{-1}$ együtthatóit, az utolsó hányados pedig a polinomot adja.)

c) A nevező $\mathbb{R}$ fölött felbonthatatlan másodfokú polinom, tehát az integrandus eleve elemi törtfüggvény. A nevező deriváltja $2x-4$, és ennek alapján az integrál kiszámításához tovább

bontjuk a számlálót: $\dfrac{5x+3}{x^2-4x+5} = \dfrac{\frac{5}{2}(2x-4)+13}{x^2-4x+5} = \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{2x-4}{x^2-4x+5} + \dfrac{13}{(x-2)^2+1}$, tehát
$\displaystyle\int \frac{5x+3}{x^2-4x+5} = \frac{5}{2}\ln(x^2-4x+5) + 13\,\mathrm{arctg}(x-2) + C.$

7. *Számítsuk ki a következő integrálokat!*

a) $\displaystyle\int e^{x-2}\,\mathrm{ch}(3x+1)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \ln\frac{x^3}{x+1}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \frac{x^4-x+3}{x^3-2x^2-x+2}$

g) $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$

Megoldás: a) $\displaystyle\int e^{x-2}\,\mathrm{ch}(3x+1)\,dx = \int e^{x-2}\left(\frac{1}{2}e^{3x+1}+\frac{1}{2}e^{-3x-1}\right)dx = \int \frac{1}{2}e^{4x-1} + \frac{1}{2}e^{-2x-3}\,dx = \frac{1}{8}e^{4x-1} - \frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$

b) $\displaystyle\int \ln\frac{x^3}{x+1}\,dx = \int 3\ln x - \ln(x+1)\,dx = 3x\ln x - 3x - (x+1)\ln(x+1) + (x+1) + C$, ugyanis $\int 1\cdot\ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$. Az integrandus felbontása csak $x > 0$-ra működik, bár az eredeti függvény $x < -1$-re is értelmezve van. Viszont az eredmény egyszerűen általánosítható arra a tartományra is: $3x\ln|x| - 3x - (x+1)\ln|x+1| + (x+1) + C$.

c) $u = x^2$, $du = 2x\,dx$ helyettesítéssel: $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}u\,\underline{e^{-u}}\,du = \frac{1}{2}u(-e^{-u}) - \int \frac{1}{2}(-e^{-u})\,du = -\frac{1}{2}(u+1)e^{-u} + C = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2} + C$, és ebből az improprius integrál $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}\right]_0^b = \frac{1}{2} - \lim_{b\to\infty}\frac{b^2+1}{2e^{b^2}} = \frac{1}{2} - \lim_{b\to\infty}\frac{2b}{4be^{b^2}} = \frac{1}{2} - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2e^{b^2}} = \frac{1}{2}.$

d) $x^2+2x = (x+1)^2 - 1$, így az $x+1 = \mathrm{ch}\,u$ $(u \geq 0)$, $dx = \mathrm{sh}\,u\,du$ helyettesítést érdemes alkalmazni:
$\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x}\,dx = \int \sqrt{\mathrm{ch}^2 u - 1}\,\mathrm{sh}\,u\,du = \int \mathrm{sh}^2 u\,du = \int \frac{1}{2}\mathrm{ch}(2u) - \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{4}\mathrm{sh}(2u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{4}\mathrm{sh}(2\,\mathrm{arch}(x+1)) - \frac{1}{2}\mathrm{arch}(x+1) + C = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2}\mathrm{arch}(x+1) + C$

e) $\displaystyle\int \underline{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\cdot\underline{\mathrm{arctg}\,x}\,dx = \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x - \int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx =$
$\displaystyle\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x - \mathrm{arsh}\,x + C$

f) $\displaystyle\int \frac{x^4-x+3}{x^3-2x^2-x+2} = \int x + 2 + \frac{5x^2-x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)}\,dx = \int x + 2 - \frac{3/2}{x-1} + \frac{5/6}{x+1} + \frac{17/3}{x-2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{5}{6}\ln|x+1| + \frac{17}{3}\ln|x-2| + C$ (Mivel a nevező csupa különböző lineáris tényezőből áll, a parciális törtek együtthatóit a letakarásos módszerrel is kiszámíthatjuk: $\frac{1}{x-1}$ együtthatója $\frac{5x^2-x-1}{(x+1)(x-2)}|_{x=1} = -\frac{3}{2}$, $\frac{1}{x+1}$ együtthatója $\frac{5x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}|_{x=-1} = \frac{5}{6}$, és $\frac{1}{x-2}$ együtthatója $\frac{5x^2-x-1}{(x-1)(x+1)}|_{x=2} = \frac{17}{3}$.)

g) $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\cdot\underline{\ln(1+x)}\,dx = -\frac{1}{x}\ln(x+1) + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx =$
$\displaystyle-\frac{1}{x}\ln(x+1) + \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx = -\frac{1}{x}\ln(x+1) + \ln|x| - \ln(x+1) + C$

8. *Döntsük el (ha szükséges, egy másik integrállal való összehasonlítva), hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e!*

a) $\displaystyle\int_0^1 x^{-2/3}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 \ln^2 x\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{arctg} x\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^4-1}}\,dx$

Megoldás: a) $\int_0^1 x^{-2/3}\,dx = \lim\limits_{b\to 0^+}\int\limits_b^1 x^{-2/3}\,dx = \lim\limits_{b\to 0^+}\left[3x^{1/3}\right]_b^1 = \lim\limits_{b\to 0^+} 3-3\sqrt[3]{b} = 3.$

b) A 3.f) feladatban kiszámoltuk, hogy $\int \ln^2 x\,dx = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$. Így $\int_0^1 \ln^2 x\,dx = \lim\limits_{b\to 0^+}(2 - b(\ln^2 b - 2\ln b + 2)) = \lim\limits_{b\to 0^+}(2 - 2b - b(\ln^2 b - 2\ln b))$. A limesz második részének kiszámításához a L'Hospital-szabályt alkalmazhatjuk: $\lim\limits_{b\to 0^+} b(\ln^2 b - 2\ln b) = \lim\limits_{b\to 0^+}\dfrac{\ln^2 b - 2\ln b}{\frac{1}{b}} = \lim\limits_{b\to 0^+}\dfrac{\frac{2}{b}\ln b - \frac{2}{b}}{-\frac{1}{b^2}} = \lim\limits_{b\to 0^+}\dfrac{2\ln b - 2}{-\frac{1}{b}} = \lim\limits_{b\to 0^+}\dfrac{\frac{2}{b}}{\frac{1}{b^2}} = \lim\limits_{b\to 0^+} 2b = 0$, tehát az integrál konvergens, és az értéke 2.

c) Mivel $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \neq 0$, az integrál csak divergens lehet (az $\int_1^\infty \operatorname{arctg} x\,dx$ integrál alulról becsülhető például $\int_1^\infty \frac{\pi}{4}\,dx = \infty$-nel).

d) $0 \le \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \le \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$ a $[0,1)$ intervallumon, és $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1^-}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^b = 2$, tehát az eredeti integrál is konvergens.

e) $0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$, ha $x \in [1,\infty)$, és $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} -e^{-b} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$, tehát $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ konvergens, és ugyanígy $0 \le e^{-x^2} \le e^{x}$, ha $x \in (-\infty,-1]$, ezért $\int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2}\,dx$ is konvergens. Ebből következik, hogy $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx + \int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2}\,dx + \int_{-1}^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ is konvergens.

f) $0 \le \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4-1}} \le \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4}}$, ha $x \in [2,\infty)$, és $\int_2^\infty x^{-4/3}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-3x^{-1/3}\right]_2^b = 3/\sqrt[3]{2}$ konvergens, így az eredeti integrál is konvergens.