Halmazok

1. (2005 ősz, 3.) Legyenek az A, B, C halmazok tetszőlegesek. Biz. be, hogy
(a) ha $\overline{A} \subseteq B \setminus C$, akkor $C \subseteq A$.
(b) ha $\overline{A} = B \setminus C$, akkor $A \cap B = B \cap C$.

2. (2008 ősz, 1.) Legyenek az A, B, C halmazok olyanok, hogy $C \subseteq A \cap B$.
a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) =?$
b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) =?$.

3. (2008 ősz, 2.) Mit mondhatunk az A, B halmazok viszonyáról, ha $A \cap B = \overline{A} \cap \overline{B}$?

4. (2009 ősz, 1.) Legyenek az A, B, C halmazok olyanok, hogy $A \subseteq B \subseteq C$.
(a) $(A \cup B) \cap (B \cup C) =?$
(b) $(A \cap B) \cup (B \cap C) =?$

5. (2010 ősz, 1.) Legyen $B \subseteq A$. Mely C halmazokra igaz, hogy $(B \setminus C) \cup A = C$?

6. (2011 tavasz, 1.) Legyenek A, B, C tetszőleges halmazok.
(a) Mutassa meg, hogy igaz a de Morgan-azonosság 3 halmazra: $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.
(b) Igaz-e mindig, hogy $A \cap B \subseteq (A \setminus B) \setminus \overline{B}$? Ha nem, akkor pontosan milyen halmazokra teljesül az egyenlőség?

7. (2011 ősz, 1.) Legyen E tetszőleges nem üres halmaz és $\overline{A} = \{\, x \in E \,|\, x \notin A \,\}$ tetszőleges $A \subseteq E$ esetén. Mit mondhatunk az $A \subseteq E$ és $B \subseteq E$ halmazok viszonyáról, ha $A \cap B = \overline{A} \cap \overline{B}$?

Vektoralgebra

1. (2005 ősz, 1.) Biz. be vektoralgebrai eszközökkel, hogy egyenlőszárú háromszög esetén az alaphoz tartozó súlyvonal szögfelezője az alappal szemben fekvő szögnek!

2. (2009 ősz, 2.) Bizonyítsa be vektoralgebrai módszerekkel, hogy az egyenlőszárú háromszög alaphoz tartozó magasságvonala felezi az alapot!

3. (2010 ősz, 2.) Adott $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) vektorok esetén mely λ számokra teljesül
(a) $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b})$;
(b) $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \,||\, (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b})$?

4. (2011 ősz, 2.) Bizonyítsa be vektoralgebrai eszközökkel, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra!

Koordináta-geometria

1. (2005 ősz, 2.) Határozza meg a $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$, $R(0, 0, 3)$ pontokat tartalmazó sík egyenletét.

2. (2006 ősz, 1.) Van-e az $e_1 : x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = -1 + 2t$ és e_2: $x = 3 - s$, $y = 2s$, $z = 3 + s$ egyeneseknek közös síkja. Ha van, adja meg ezen sík egyenletét!

3. (2007 ősz, 1.) Határozza meg a $P(1, 2, -1)$ pont merőleges vetületét az $S : x - y + z = 0$ síkra!

4. (2008 ősz, 3.) Határozza meg az $x + y + z = 1$ egyenletű síkra merőleges és az $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$ egyenletű egyenest tartalmazó sík egyenletét!

5. (2009 ősz, 3.) Legyen $P(1, 2, 3)$. Írja fel a P ponton átmenő, és az x tengellyel párhuzamos egyenes, illetve a P ponton átmenő, és az x tengelyre merőleges sík egyenletét!

6. (2010 ősz, 3.) Mi az $e : x = 5 + 2t$, $y = 3 + t$, $z = -10 - 6t$ egyenes merőleges vetülete az $S : x + 3y - z = 2$ síkon?

7. (2011 tavasz, 2.) Milyen helyzetűek egymáshoz képest az $e: z = 1+t$, $y = 1$, $z = t$ és $f: z = 2-t$, $y = 1-t$, $z = 3-t$ egyenesek? Ha van olyan sík, ami mindkettővel párhuzamos, és átmegy az $(1,2,3)$ ponton, akkor adja meg egy ilyen sík egyenletét!

8. (2011 ősz, 3.) Legyen $P = (2,5,3)$. Legyen az e egyenes egyenlete $x = 1$, $y = 2+t$, $z = 3+2t$, az S sík egyenlete pedig $4x+2y-2z = 7$. Írja fel a P ponton átmenő, az S síkkal párhuzamos azon f egyenes egyenletét, melynek az e-vel van közös pontja!

Komplex számok 1.

1. (2007 ősz, 2.) Oldja meg a következő egyenletet a komplex számok körében: $|z| - z = 1+2i$.

2. (2008 ősz, 4.) Adja meg az $\dfrac{1}{i} + \dfrac{1-i}{1+i^{501}}$ komplex szám kanonikus (algebrai) alakját!

3. (2010 ősz, 4.) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a komplex számok halmazán:

$$z^2 = \frac{1}{z^2}, \quad \overline{z+\overline{z}} = 0.$$

4. (2011 ősz, 5.) Oldja meg a következő egyenletet a komplex számok körében!

$$|z|^2 + z^2 = 8+12i$$

Elmélet

1. (a) (2008 ősz, 6.(a)) Igaz-e, hogy
   (1) $(A \cup B) \setminus B = A$
   (2) $(A \setminus B) \cup B = A$

(b) (2009 ősz, 6.(a)) Legyen E tetszőleges halmaz. Mely $A, B \subseteq E$ halmazokra áll fenn, hogy $A \cap B = \emptyset$ és $A \cup B = E$?

(c) (2011 ősz, 6.(a)) Legyenek $E \neq 0$, $A, B, C \subseteq E$ tetszőleges halmazok.
   (1) Igaz-e, hogy $(A \cup B) \cup \overline{B} = A \cup (B \cup \overline{B})$?
   (2) Igaz-e, hogy $(A \cap B) \cup \overline{B} = A \cap (B \cup \overline{B})$?

2. (a) (2007 ősz, 6.(a)) Igaz-e, hogy ha a és b két térvektor és $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a} = 0$ vagy $\mathbf{b} = 0$.

(b) (2008 ősz, 6.(b)) Igaz-e, hogy ha a és b két térvektor, és $a \cdot b = -$, akkor $a = 0$ vagy $b = 0$.

(c) (2011 tavasz, 6.(a)) Ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ merőleges vektorok, akkor igaz-e, hogy $((\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{y}) \times \mathbf{y}$ merőleges $\mathbf{x}$-re.

(d) (2011 ősz, 6.(b)) Legyenek a, b és c tetszőleges térvektorok.
   (1) Igaz-e, hogy ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b}$?
   (e) Igaz-e, hogy ha $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a} + \mathbf{c} < \mathbf{b} + \mathbf{c}$?

3. a) (2007 ősz, 6.(b)) Legyen z tetszőleges komplex szám. Igaz-e, hogy
   (1) $z \cdot \overline{z}$ tiszta valós   (2) $\dfrac{z}{\overline{z}}$ tiszta valós

(b) (2008 ősz, 6.(c)) Legyen z tetszőleges komplex szám. Igaz-e, hogy
   (1) $z + \overline{z}$ tiszta valós   (2) $\dfrac{z \cdot \overline{z}}{|z|^2} = 1$

(c) (2009 ősz, 6.(c)) Legyen z tetszőleges komplex szám. Igaz-e, hogy
   (1) $\operatorname{Re} iz = \operatorname{Im} \overline{z}$;   (2) $\operatorname{Im} iz == \operatorname{Re} \overline{z}$?

(d) (2011 tavasz, 6.(b)) Igaz-e. hogy $(z+w)^{22} = (\overline{z} + \overline{w})^{22}$ minden z, w komplex számra.

(e) (2011 ősz, 6.(c)) Legyen z tetszőleges komples szám. Igaz-e, hogy
   (1) $\operatorname{Re}(z \cdot w) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} w$;   (2) $\operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w$?

4. (2010 ősz, 6.(a)) Igaz-e, hogy ha a $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nemüres halmazok, és A minden eleme kisebb B minden eleménél, akkor $\sup A < \inf B$.