Komplex számok 2.

1. Adja meg a $z = 2i\dfrac{-8+6i}{3+4i}$ komplex szám minden 4. gyökét!

2. Adja meg a $\left(\sqrt{\dfrac{i}{1-i}}\right)^{1001}$ komplex számot kanonikus alakban!

3. Adja meg algebrai alakban a $z^6 - 16iz^3 - 64 = 0$ egyenlet komplex megoldásait!

4. Egy a komplex számsíkon elhelyezkedő szabályos háromszög középpontja az origó, egyik csúcsa pedig $z_1 = 1 + i$. Adjuk meg a további csúcsait!

5. Adjuk meg az összes olyan komplex számot, amelynek az egyik hetedik gyöke megegyezik az egyik harmadik gyökével!

Sorozatok

1. Határozza meg a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{1+n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{1+2^n}$

2. Határozza meg a következő határértékeket!

$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n})$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+2n}$

3. Konvergensek-e az alábbi sorozatok, és ha igen, mi a határértékük?

$a_n = \sqrt{n^4+n^2} - \sqrt{n^4-n^2},$ $b_n = \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}$ $c_n = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{n}$

4. Határozza meg a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + \sqrt{4^n+1} + 4n^2}{3^{n/2} - 2^{n+2} - 2n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{2n-3} - \sqrt{2n+2})$

5. Határozza meg az $\sqrt[n]{1+2+\ldots+n^2}$ sorozat határértékét!

6. Állapítsa meg, hogy a következő sorozatok konvergensek-e, és határozza meg az összes torlódási pontjukat!

$(a_n) = \left(\dfrac{2}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots\right)$ $b_n = (-1)^n\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ $c_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$

Függvények határétéke

1. Határozza meg az $f(x) = \dfrac{12x^2}{(x-2)(4x+16)}$ függvény gyökhelyeit, az origóban vett értékét, határértékeit a $+/-$ végtelenben, és a szakadási helyeken vett jobb és bal oldali határértékeit! Ezek alapján ábrázolja vázlatosan a függvényt!

2. Legyen n tetszőleges pozitív egész! Határozzuk meg a következő limeszeket!

$\lim\limits_{x\to\infty} x^n \cdot e^{-x}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \cdot \ln x$

3. Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1-\cos x}\right)$ határértéket!

4. Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{\mathrm{sh}(x)}$ határértéket!

5. Határozzuk meg a következő limeszeket, ha vannak!

$\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$ $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$

6. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x} - x\right)^{1/x}$ határértéket!

7. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{4x^2 - 3x + 2}$ függvény aszimptotáját $+\infty$-ben!

Függvények folytonossága

1. Állapítsa meg, folytonos-e $f(x)$, illetve $g(x)$ az origóban, ha

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

2. Döntse el, van-e megoldása az $e^{e^x} = 2$ egyenletnek!

3. Hol folytonos, és milyen szakadási helyei vannak az $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$ függvénynek?

4. Hol folytonos, és milyen szakadási helyei vannak az $f(x) = \dfrac{\sin 2\pi x}{2\pi x} + \dfrac{1}{3^{x/(x+1)}} + \dfrac{2x-2}{|x-1|}$ függvénynek?

Elmélet

1. Az (a_n), (b_n) sorozatokra vonatkozó alábbi következtetések közül melyik igaz és melyik nem?

a) Ha (a_n) és (b_n) konvergens, akkor $(a_n) + (b_n)$ és $(a_n) \cdot (b_n)$ is az.
b) Ha $(a_n \cdot b_n)$ és $(a_n) + (b_n)$ konvergens, akkor (a_n) és (b_n) is konvergens.
c) Ha $\lim a_n = 0$, akkor $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$.
d) Ha $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$, akkor vagy $\lim a_n = 0$, vagy $\lim b_n = 0$.
e) Ha (a_n) konvergens, akkor monoton.
f) Ha (a_n) konvergens, akkor korlátos.
g) Ha (a_n) és (b_n) is korlátos, akkor $(a_n \cdot b_n)$ is korlátos.
h) Monoton növő, felülről korlátos sorozat konvergens.
i) Nem monoton növő, felülről korlátos sorozat divergens?
j) Ha $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$, de $b_n \neq 0$ (minden n-re), akkor $a_n/b_n \to 1$.

2. a) Mikor mondjuk azt, hogy egy f valós függvény korlátos értelmezési tartományának egy H részhalmazán?
b) Adja meg a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ fogalom definícióját!
c) Legyen az f valós függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy x_0 egy kiszúrt környezete már beleesik f értelmezési tartományába. Mikor mondjuk azt, hogyz x_0 megszüntethető szakadási helye f-nek?
d) Töltse ki az alábbi mondatban pontokkal jelölt hiányzó elemeket úgy, hogy az az f valós függvény a pontbeli folytonosságának a definíciója legyen!

> $\ldots\ \ldots > 0$ esetén $\ldots\ \delta > 0$, hogy minden az értelmezési tartományba eső x pont esetén fennáll az, hogy amennyiben $|x - \ldots| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x)| < \ldots$.

e) A folytonosság definíciója alapján mutassa meg, hogy az $f(x) = x$ függvény mindenütt folytonos!
f) Igaz-e, hogy ha minden $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}$-be képező szigorúan monoton függvény invertálható, és az inverze is szigorúan monoton nő?
g) Igaz-e, hogy
(g1) Nem korlátos intervallumon minden folytonos függvény nem korlátos;
(g2) Korlátos intervallumon minden folytonos függvény korlátos;
(g3) Korlátos intervallumon minden nem folytonos függvény nem korlátos;
(g4) Korlátos zárt intervallumon minden folytonos függvény korlátos;
(g5) Korlátos zárt intervallumon minden monoton függvény korlátos.
h) Legyen $I = [a, b]$ tetszőleges korlátos zárt intervallum. Igazak-e a következő állítások?
(h1) I-n invertálható függvény szigorúan monoton I-n;
(h2) I-n szigorúan monoton függvény invertálható I-n;
(h3) I-n monoton függvény felveszi a minimumát és maximumát is I-n;
(h4) I-n nem monoton függvény nem veszi fel vagy a minimumát, vagy a maximumát I-n.