Differenciálhatóság

Wettl Ferenc előadása alapján

2015.10.19. és 2015.10.26.

1. A differenciálhatóság fogalma
   - Pontbeli differenciálhatóság
   - Jobb és bal oldali differenciálhatóság
   - Folytonosság és differenciálhatóság
   - Deriváltfüggvény
2. Differenciálási szabályok
   - Összeg, szorzat, hányados
   - Összetett függvény differenciálása
   - Implicit függvény deriváltja
   - Inverz függvény deriváltja
3. Darboux-tétel
4. Összefoglalás

Pontbeli differenciálhatóság

Definíció (Differenciálhatóság)

A valós f függvény a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban differenciálható, ha létezik az

$$m = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

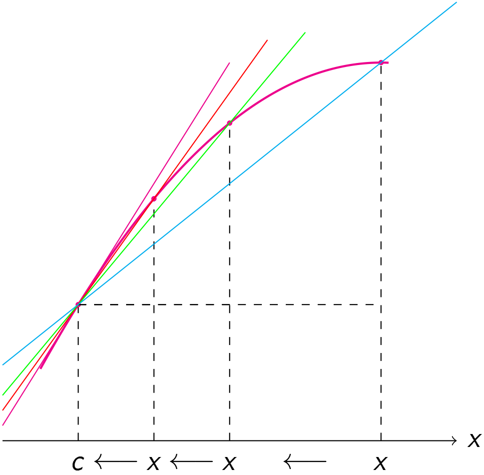
véges határérték.

Ekvivalens alak $x = c + h$ helyettesítéssel:

$$m = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Az m számot az f c-beli differenciálhányadosának vagy c-beli deriváltjának nevezzük.

Az előző határérték épp az f grafikonjához húzott $(c, f(c))$-pontbeli érintő meredeksége.



Példa

Az $f(x) = e^x$ függvény grafikonjához $c = 0$-ban húzott érintő meredeksége az e definíciója szerint 1,vagyis f itt differenciálható és a derivált értéke 1.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - \mathrm{e}^0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1.$$

Következmény

Az e^x függvény tetsz. $c \in \mathbb{R}$-ben differenciálható, és a derivált értéke e^c.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{c+h} - \mathrm{e}^c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^c(\mathrm{e}^h - 1)}{h} = \mathrm{e}^c \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^c$$

Állítás

Ha az f függvény differenciálható a c pontban és differenciálhányadosa itt m, akkor érintőjének egyenlete

$$y = f(c) + m(x - c).$$

Példa

Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény $(1, 1)$ pontbeli érintőjének egyenletét!

Az érintő meredeksége (iránytangense) a differenciálhányados $c = 1$-ben:

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Így az érintő egyenlete:

$$y = 1 + 2(x - 1), \text{ azaz } y = 2x - 1.$$

Jobb és bal oldali differenciálhatóság

Értelemszerűen módosítva a definíciót:

Definíció

A valós f függvény a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban differenciálható jobbról (balról), ha létezik az

$$m = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{x - c}$$

$$(m = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{x - c})$$

véges határérték.

Az m számot az f c-beli jobb (bal) oldali differenciálhányadosának vagy c-beli jobb (bal) oldali deriváltjának nevezzük.

Példa

$f(x) = |x|$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \Longrightarrow \text{jobb oldali derivált } 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \Longrightarrow \text{bal oldali derivált } -1$$

Mivel a két egyoldali derivált a 0-ban különböző, f nem deriválható a 0-ban.

Példa

$f(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty,$$

nincs véges határérték, a függvény nem differenciálható jobbról a 0-ban.

Folytonosság és differenciálhatóság

Tétel (Differenciálható függvény folytonos)

Ha f differenciálható c-ben, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás

$$\lim_{x \to c} f(x) - f(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) = m \cdot 0 = 0,$$

ha m az f differenciálhányadosa c-ben.Így

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Megjegyzés

Az állítás visszafelé nem igaz, pl. $f(x) = |x|$ a $c = 0$ pontban.

Deriváltfüggvény

Definíció

Az f deriváltfüggvénye az

$$f' : x \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

függvény,mely f differenciálhatósági helyein van értelmezve.

A deriváltfüggvényre egy másik szokásos jelölés: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Definíció (Magasabbrendű deriváltak)

$f'' = (f')'$, $f''' = (f'')'$,$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Példa

- $(e^x)' = e^x$
- $(a)' = 0$ (konstansfüggvény deriváltja 0)
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha n pozitív egész szám, ugyanis $c \in \mathbb{R}$ esetén:

$$\lim_{x\to c} \frac{x^n - c^n}{x - c} = \lim_{x\to c} \frac{(x-c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + \ldots + xc^{n-2} + c^{n-1})}{x - c} =$$

$$= \lim_{x\to c} (x^{n-1} + x^{n-2}c + \ldots + xc^{n-2} + c^{n-1}) = nc^{n-1}$$

Példa

$\sin' x = \cos x$, ugyanis $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(c+h)-\sin(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin c \cos h + \cos c \sin h - \sin(c)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos c \sin h - \sin c(1-\cos h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (\cos c)\frac{\sin h}{h} - (\sin c)\frac{1-\cos h}{h} = (\cos c)\cdot 1 - (\sin c)\cdot 0 = \cos c,$$

ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h(1+\cos h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}(\sin h)\frac{1}{1+\cos h} = 1\cdot 0\cdot 2 = 0$$

Differenciálási szabályok

Tétel

Legyenek f és g c-ben differenciálható függvények, $a \in \mathbb{R}$ konstans.

1. $(af)'(c) = af'(c)$
2. $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$
3. $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)}$, speciálisan $\left(\frac{1}{g}\right)'(c) = -\frac{g'(c)}{g^2(c)}$, ha $g(c) \neq 0$

Bizonyítás (2)

$$(f+g)'(c) = \lim_{x\to c} \frac{(f(x)+g(x)) - (f(c)+g(c))}{x-c} =$$

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right) = f'(c) + g'(c)$$

Bizonyítás (3)

$$\begin{aligned}(fg)'(c) &= \lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}\\ &= \lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}\\ &= \lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}g(x)+f(c)\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right)\\ &= f'(c)g(c)+f(c)g'(c)\end{aligned}$$

Példa

$(x^n)' = nx^{n-1}$, ha n negatív egész szám, ugyanis legyen $-n = m \in \mathbb{N}$

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

Tétel (Láncszabály)

Ha g differenciálható c-ben, és f differenciálható $g(c)$-ben, akkor $f \circ g$ differenciálható c-ben, és

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c))g'(c)$$

Bizonyítás

$$(f \circ g)'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} =$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} =$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \cdot \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} =$$

$$= \lim_{y \to g(c)} \frac{f(y) - f(g(c))}{y - g(c)} \cdot \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = f'(g(c))g'(c)$$

A fő kérdés mindig: melyik a külső függvény?

Példa

- $(\sin^2 x)' = ?$
  Külső függvény: $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$
  Belső függvény $g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x$

$$(\sin^2 x)' = 2(\sin x) \cdot \cos x$$

- $(\sin x^2)' = ?$
  Külső függvény $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
  Belső függvény: $g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$

$$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$$

Példa

$(\sin^2 x^3)' = ?$
Külső függvény $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$
Belső függvény: $g(x) = \sin x^3$

$$(\sin^2 x^3)' = 2\sin x^3 \cdot (\sin x^3)'$$

$(\sin x^3)' = ?$
Külső függvény $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
Belső függvény: $g(x) = x^3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2$

$$(\sin x^3)' = \cos x^3 \cdot 3x^2$$

Tehát:

$$(\sin^2 x^3)' = 2\sin x^3 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2$$

Példa

- $\cos' x = -\sin x$, hiszen $\cos' x = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' =$
  $= \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (\frac{\pi}{2} - x)' = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x$
- $\mathrm{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$, hiszen $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} =$
  $= \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\mathrm{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$, hiszen $\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{\sin^2 x} =$
  $= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Példa

- $(a^x)' = a^x \ln a$, ahol $a > 0$,hiszen $(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a$
- $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}\cdot(-1)}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$
- $(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$
- $(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \left(\frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}\right) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
- $(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \left(\frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}\right) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Definíció (Implicit függvény)

$F(x, y) = 0$, melyről föltesszük, hogy $F(x_0, y_0) = 0$, és az (x_0, y_0) pont egy kis környezetében y kifejezhető x függvényeként, azaz van olyan f függvény és $\varepsilon > 0$, hogy $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ esetén $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$.

Tekintsük a $h(x) = F(x, f(x))$ függvényt.

$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ esetén $h(x) = F(x, f(x)) = 0 \implies$ vagyis x_0-ban a deriváltja is 0 lesz. $\implies$ Ebből az összefüggésből pedig ki lehet fejezni $f'(x_0)$-t.

$f(x)$-re szokás ilyenkor az $y(x)$ jelölést is használni.

Példa

Mennyi az $y^2 = x^3 - x$ görbe érintőjének meredeksége a $(2, \sqrt{6})$ pontban?

$F(x, y) = y^2 - x^3 + x \Rightarrow y = y(x)$ és tekintsük a deriváltat $x_0 = 2$-ben:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x, y(x)) \,|_{x=2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x)^2 - x^3 + x \,|_{x=2} = 2y(x)y'(x) - 3x^2 + 1 \,|_{x=2}$$

$$\Rightarrow 0 = 2y(2)y'(2) - 3 \cdot 2^2 + 1$$

$$\Rightarrow y'(2) = \frac{3 \cdot 2^2 - 1}{2y(2)} = \frac{11}{2\sqrt{6}}$$

Megjegyzés

Mivel a differenciálás lineáris művelet, ezért az egyenletet nem szükséges a deriválás előtt átrendezni.

Tétel (Inverz függvény deriváltja)

Ha f differenciálható az I intervallumon, és a derivált sehol sem 0, akkor az f függvény g inverze is differenciálható, és

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

Bizonyítás (vázlat)

$x = f(g(x))$, ennek implicit deriváltja

$$1 = f'(g(x)) \cdot g'(x) \implies g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Megjegyzés

Ha $a \in I$, és $b = f(a)$, akkor

$$g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Példa

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$
  $g(x) = \ln x$ az $f(x) = e^x$ függvény inverze, és $f'(x) = e^x$, így
  $$(\ln x)' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$
- $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}$
- Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor az x^{a-1} függvény értelmezési tartományának minden pontjában
  $$(x^a)' = ax^{a-1},$$
  hiszen
  $$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x}(a \ln x)' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

Példa

- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$
  $g(x) = \arcsin x$ az $f(x) = \sin x|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ függvény inverze, és
  $f'(x) = \cos x$, így

$$(\arcsin x)' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{mert}\ \ \cos(\arcsin x) > 0\ \text{a}\ (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\text{-n.}$$

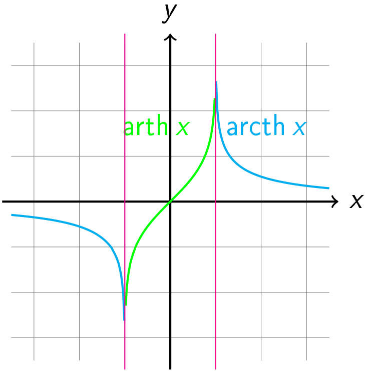
Példa

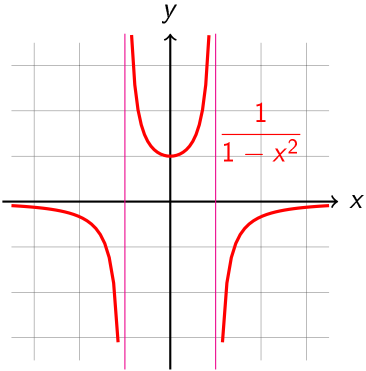
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$, ugyanis $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$
  $g(x) = \operatorname{arctg} x$ az $f(x) = \operatorname{tg} x|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ függvény inverze, és
  $f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, így
  $(\operatorname{arctg} x)' = g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} =$
  $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, ugyanis $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$

Példa

Hasonlóan kiszámítható az area függvények deriváltja:

- $(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \ x \in \mathbb{R}$
- $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x \in (1, +\infty)$
- $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \ x \in (-1, 1)$
- $(\operatorname{arcth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$


y
x
arth x
arcth x


y
x
$\frac{1}{1-x^2}$

Elemi függvények deriváltja - összesítés

$f(x)$		$f'(x)$
a	$a \in \mathbb{R}$	0
x^a	$a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}
$\sin x$		$\cos x$
$\cos x$		$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$x \neq k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x		e^x
a^x	$a > 0$	$a^x \ln a$
$\operatorname{sh} x$		$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$		$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$		$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{cth} x$	$x \neq 0$	$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Elemi függvények inverzeinek deriváltja - összesítés

$f(x)$		$f'(x)$
$\ln x$	$x > 0$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$x > 0$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\arcsin x$	$x \in (-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$x \in (-1, 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}\, x$		$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arcctg}\, x$		$-\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arsh}\, x$		$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{arch}\, x$	$x \in (1, \infty)$	$\frac{1}{x^2-1}$
$\mathrm{arth}\, x$	$x \in (-1, 1)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\mathrm{arcth}\, x$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$\frac{1}{1-x^2}$

Definíció

f differenciálható (deriválható) egy (a, b) nyílt intervallumon, ha annak minden pontjában differenciálható.
f differenciálható az $[a, b]$ zárt intervallumon, ha (a, b)-n differenciálható, továbbá a-ban jobbról, b-ben balról differenciálható.

Tétel (Darboux-tétel)

Ha a és b olyan intervallum pontjai, melyen f differenciálható, akkor f' az $f'(a)$ és $f'(b)$ között minden értéket fölvesz, azaz f' "Darboux-tulajdonságú".

Megjegyzés

A Bolzano–Darboux-tételben bizonyítottuk, hogy a folytonos függvények Darboux-tulajdonságúak. Bár az előbbi tétel szerint intervallumon differenciálható függvények deriváltfüggvénye is Darboux-tulajdonságú, a következő példa mutatja, hogy f' nem feltétlenül folytonos.

Példa

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

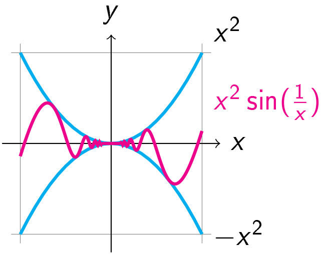
$x \neq 0 : f'(x) = (x^2 \sin(x^{-1}))' =$

$= 2x \sin(x^{-1}) + x^2 \cos(x^{-1})(-1)x^{-2} =$

$= 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$

$x = 0 : f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h - 0} =$

$= \lim_{h \to 0} h \sin(\frac{1}{h}) = 0$



$\Longrightarrow f'$ nem folytonos a 0-ban, mert nem létezik ott határértéke

Összefoglalás

- Differenciálhatóság fogalma, deriváltfüggvény
- Differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata
- Differenciálási szabályok (összeg, különbség, szorzat, hányados, összetett függvény, inverz függvény)
- Elemi függvények deriváltjai
- Darboux-tétel