A derivált alkalmazásai II.

Függvényvizsgálat

Wettl Ferenc előadása alapján

2015.10.28. és 2015.11.02.

Monotonitás

Tétel

Legyen f egy valós függvény, mely folytonos $[a, b]$-n és diffható (a, b)-n.

- $f' \geq 0$ az (a, b)-n pontosan akkor, ha f monoton növekvő $[a, b]$-n.
- $f' \leq 0$ az (a, b)-n pontosan akkor, ha f monoton csökkenő $[a, b]$-n.

Bizonyítás

Csak az $f' \geq 0$ esetet bizonyítjuk, a másik eset ugyanígy működik.
Először tegyük fel, hogy $f' \geq 0$ az (a, b)-n és legyen $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$.
Alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt az $[x_1, x_2]$ intervallumra.
$\Longrightarrow$ Van olyan $c \in (x_1, x_2)$, hogy $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.
$x_2 - x_1 > 0$ és $f'(c) \geq 0 \Longrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$, azaz f monoton növekvő $[a, b]$-n.

Bizonyítás (folytatás)

A másik irányhoz tegyük fel, hogy f monoton növekvő $[a, b]$-n, és legyen $c \in (a, b)$.

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Mivel f monoton növekvő $[a, b]$-n, ezért az $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ hányados minden $x \in [a, b]$ esetén nemnegatív $\Longrightarrow$ a határérték sem lehet negatív $\Longrightarrow$ $f' \geq 0$.

Tétel

Legyen f egy valós függvény, mely folytonos $[a, b]$-n és diffható (a, b)-n.

- Ha $f' > 0$ az (a, b)-n, akkor f szigorúan monoton növekvő $[a, b]$-n.
- Ha $f' < 0$ az (a, b)-n, akkor f szigorúan monoton csökkenő $[a, b]$-n.

Bizonyítás

Legyen $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt az $[x_1, x_2]$ intervallumra.
$\Longrightarrow$ van olyan $c \in (x_1, x_2)$, hogy $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$
$\Longrightarrow$
ha $f' > 0$, akkor $f(x_2) > f(x_1)$, azaz f szigorúan monoton növekvő
ha $f' < 0$, akkor $f(x_2) < f(x_1)$, azaz f szigorúan monoton csökkenő

Megjegyzés

Az állítás megfordítása nem igaz, például az $f(x) = x^3$ függvény szigorúan monoton növekvő, de 0-ban a deriváltja 0, azaz $f' > 0$ nem teljesül minden pontban.

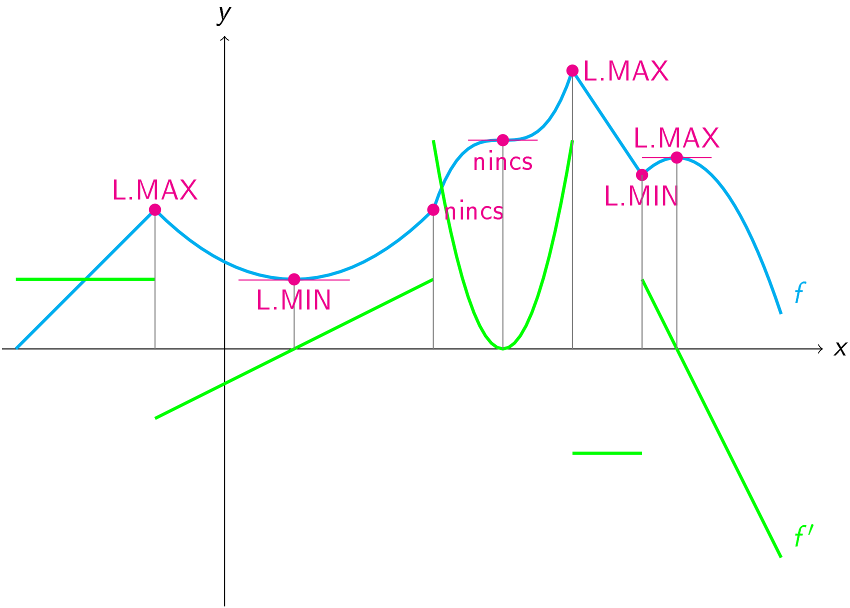
Következmény

Tegyük fel, hogy f folytonos az (a, b)-n és diffható az (a, c) és (c, b) intervallumokon, és c az f kritikus pontja.

- Ha f' az (a, c)-n pozitív, a (c, b)-n negatív, akkor f-nek c-ben lokális maximuma van.
- Ha f' az (a, c)-n negatív, a (c, b)-n pozitív, akkor f-nek c-ben lokális minimuma van.
- Ha f' azonos előjelű (pozitív vagy negatív) az (a, c) és (c, b) intervallumokon, akkor nincs lokális szélsőértéke c-ben.

Bizonyítás

Ha f' az (a, c)-n pozitív, akkor minden $x \in (a, c)$ elemre $f(x) < f(c)$.
Hasonlóképp, ha f' a (c, b)-n negatív, akkor minden $x \in (c, b)$ elemre $f(x) < f(c)$. Tehát c maximumhely.
A másik két állítás hasonlóan bizonyítható.


y
x
L.MAX
L.MIN
nincs
nincs
L.MAX
L.MAX
L.MIN
f
f′

Példa

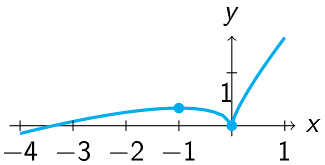
Határozzuk meg az $f(x) = x^{2/3} + \frac{2}{3}x$ függvény lokális szélsőértékhelyeit!

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}$, ez nincs értelmezve az $x = 0$ helyen.

$f'(x) = 0$, ha $x = -1$.

A kritikus pontok $x = -1$, $x = 0$.

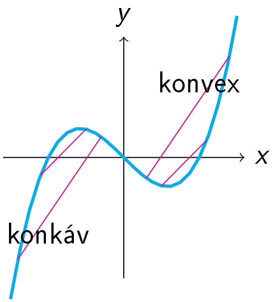
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$+$	0	$-$	nincs ért.	$+$
f	$\nearrow$	lok.max ($1/3$)	$\searrow$	lok.min (0)	$\nearrow$



Konvexitás

Definíció

Az I itervallumon értelmezett f függvény konvex (konkáv), ha a függvény grafikonjának bármely két pontját összekötő húr, a grafikon fölött (alatt) halad (beleértve, hogy a két grafikon egybeesik).



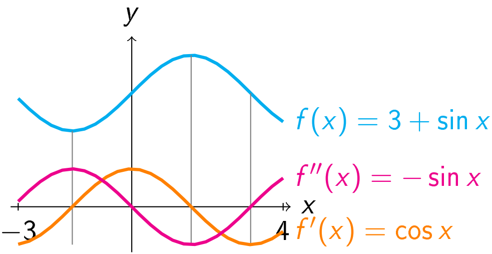
Tétel

Ha az I itervallumon értelmezett f függvény diffható, és f' monoton növekvő (csökkenő) I-n, akkor f konvex (konkáv) az I-n.

Tétel

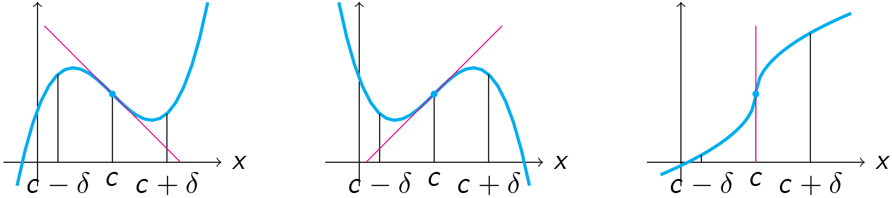
Ha az I itervallumon értelmezett f függvény kétszer diffható, és $f'' > 0$ ($f'' < 0$) az I-n, akkor f konvex (konkáv) az I-n.

Példa



Definíció

Az f függvénynek a c pontban inflexiós pontja van, ha f-nek létezik a deriváltja (véges vagy végtelen) a c pontban, és van olyan $\delta > 0$, hogy a $(c-\delta, c)$ intervallumon f konvex, és a $(c, c+\delta)$ intervallumon f konkáv, vagy fordítva. .



Tétel

Ha f kétszer diffható (a, b)-n, és $c \in (a, b)$-ben f-nek inflexiós pontja van, akkor $f''(c) = 0$.

Azaz az $f''(c) = 0$ szükséges, (de nem elégséges) feltétele annak, hogy egy kétszer diffható függvénynek inflexiós pontja legyen c-ben.

Tétel

Ha f kétszer diffható az (a, b)-n, és valamely $\delta > 0$-ra $f'' > 0$ a $(c - \delta, c)$-n és $f'' < 0$ a $(c, c + \delta)$-n, vagy fordítva, akkor ott inflexiós pontja van.

Tétel

Ha f diffható (a, b)-n, és valamely $c \in (a, b)$-re f' az (a, c)-n szigorúan monoton növekvő, (c, b)-n szigorúan monoton csökkenő (vagy fordítva), akkor f-nek c-ben inflexiós pontja van.

Példa

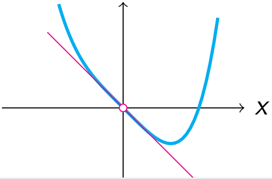
(Ahol a második derivált 0, nem biztos, hogy inflexiós pont van.)

Határozzuk meg az $f(x) = x^4 - x$ függvény konvex és konkáv tartományait és inflexiós pontjait!

$$f'(x) = 4x^3 - 1$$

$$f''(x) = 12x^2$$

Bár $f''(0) = 0$, itt nincs inflexiós pontja f-nek, mert f'' előtte és utána is pozitív, azaz az f előtte és utána is konvex (így az egész számegyenesen konvex).



Példa

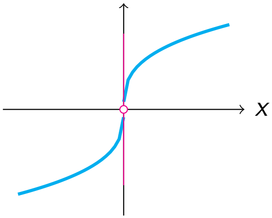
(Inflexiós pont lehet ott, ahol f'' nincs értelmezve.)

Határozzuk meg az $f(x) = x^{1/3}$ függvény konvex és konkáv tartományait és inflexiós pontjait!

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

Bár f'' nincs értelmezve a 0-ban, itt mégis inflexiós pontja f-nek, mert f'' előtte pozitív, utána negatív, azaz az f előtte konvex, utána konkáv.



Tétel (Második derivált és a lokális szélsőérték)

Legyen f'' folytonos egy, a c pontot tartalmazó, nyílt intervallumon.

- $f'(c) = 0,\ f''(c) > 0 \Rightarrow f$-nek c-ben lokális minimuma van.
- $f'(c) = 0,\ f''(c) < 0 \Rightarrow f$-nek c-ben lokális maximuma van.
- $f'(c) = 0,\ f''(c) = 0$, akkor további vizsgálat szükséges.

Bizonyítás

Ha $f''(c) > 0$, akkor f'' folytonossága miatt c egy környezetében $f''(x) > 0$, így f' szigorúan monoton növekvő. Ugyanakkor $f'(c) = 0$, így $f'(x)$ előjele $x < c$ esetén negatív, $x > c$ esetén pozitív. $\Longrightarrow f$-nek c-ben lokális minimuma van.
A másik eset hasonlóan bizonyítható.

Következmény

Ha f''' folytonos a c pontot tartalmazó nyílt intervallumon, $f''(c) = 0$, $f'''(c) \neq 0$, akkor f-nek c-ben inflexiós pontja van.

Példa

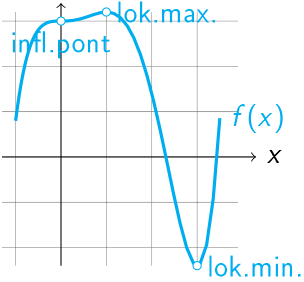
Keressük meg az $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + x^3 + 3$ függvény lokális szélsőértékhelyeit!

$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 \Longrightarrow$ krit. pontok: $x_{1,2} = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 3$

$f''(x) = 4x^3 - 12x^2 + 6x,$

$f''(1) = -2$ lok.max., $f''(3) = 18$ lok. min., $f''(0) = 0 \Longrightarrow$

$f'''(x) = 12x^2 - 24x + 6,\ f'''(0) \neq 0$ miatt 0-ban inflexiós pont van.



Teljes függvényvizsgálat

1. $D(f)$, f szakadási pontjai, szimmetriája (páros/páratlan), periodikussága
2. f', f'' (esetleg f''') meghatározása
3. kritikus pontok (f'-ből)
4. monotonitás, szélsőértékhelyek
5. konvexitás, inflexiós pontok
6. aszimptoták (határértékek az ÉT szélein)
7. függvényértékek kiszámítása (a fenti kiszámolt pontokban, $x = 0$-ban, zérushelyek,...)
8. grafikon megrajzolása
9. értékkészlet

Példa

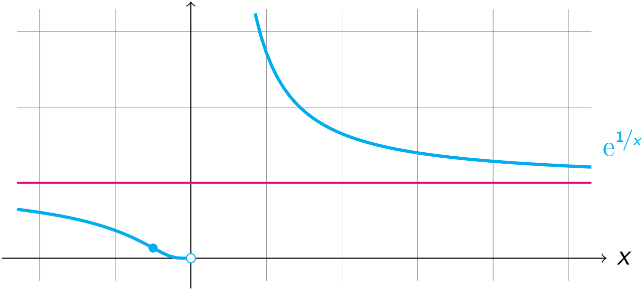
Végezzünk függvényvizsgálatot az $\mathrm{e}^{1/x}$ függvényen!

1. ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (nem páros, nem páratlan, nem periodikus)
2. $f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^4}$
3. nincs kritikus pont
4. $f' < 0$ mindenütt, f mindenütt szigorúan monoton csökkenő,
5. $f''(x) = 0$ az $x = -1/2$ helyen, f'' előtte negatív (f konkáv), utána pozitív (f konvex), tehát f-nek $x = -1/2$-ben inflexiós pontja van
6. $\lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{1/x} = 0$, $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{1/x} = \infty$, $\implies x = 0$ függőleges aszimptota

   $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{1/x} = 1 \implies y = 1$ vízszintes aszimptota
7. $f(-1/2) = \mathrm{e}^{-2} \approx 0.135$, $f(1) = \mathrm{e}$

Példa

8. Grafikon:



9. $R(f) = (0,1) \cup (1,+\infty)$

Összefoglalás

- (szigorú) monotonitás és a derivált kapcsolata
- a derivált előjelváltása és a szélsőérték kapcsolata
- f konvexitása és f' szigorú monotonitásának kapcsolata
- f konvexitása és f'' előjele közti kapcsolat
- inflexiós pont lézetése és f'' nulla volta közti kapcsolat
- második derivált és a lokális szélsőérték kapcsolata
- teljes függvényvizsgálat