

A derivált alkalmazásai I.

Wettl Ferenc előadása alapján

2015.10.26. és 2015.10.28.

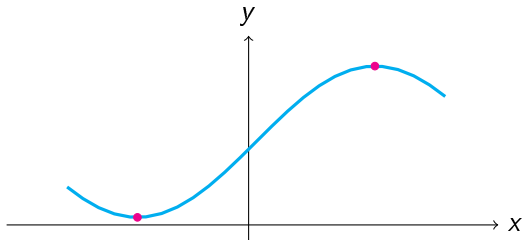
- 1 Függvény szélsőértékei
 - Lokális szélsőértékek
 - Lokális szélsőérték és derivált
 - Abszolút szélsőértékek
- 2 Középértéktételek
 - Rolle-féle középértéktétel
 - Lagrange-féle középértéktétel
 - Cauchy-féle középértéktétel
- 3 L'Hospital-szabály
 - Függvények nagyságrendje
- 4 Taylor-polinom

Lokális szélsőértékek

Definíció

Az f függvénynek a $D(f)$ valamely c belső pontjában **lokális maximuma** (**lokális minimuma**) van, ha van olyan c -t tartalmazó nyílt $I \subseteq D(f)$ intervallum, melynek minden x elemére

$$f(x) \leq f(c) \quad (f(x) \geq f(c))$$



Tétel

Ha f -nek c -ben lokális szélsőértéke van, és f diffható c -ben $\implies f'(c) = 0$.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy f -nek lokális maximuma van c -ben. Ekkor

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

$\implies f'(c)$ csak 0 lehet. Minimumhelyre a bizonyítás ugyanígy működik.

Definíció

A $c \in D(f)$ pont az f függvény **kritikus pontja** ha f' nem létezik c -ben vagy ha létezik és $f'(c) = 0$.

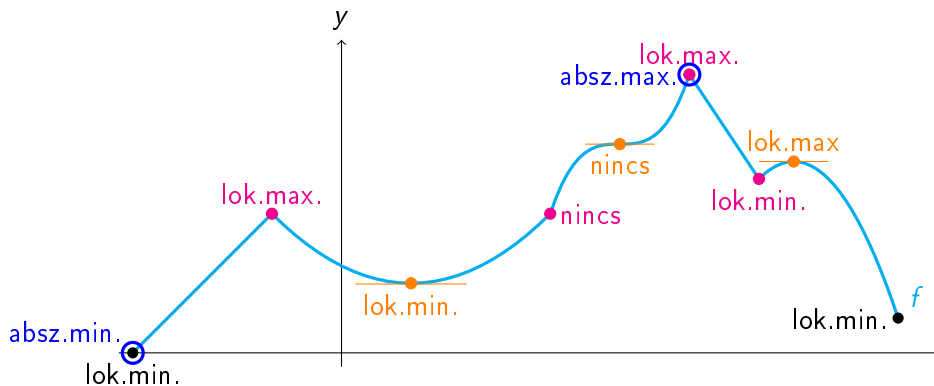
Abszolút szélsőértékek

Definíció

Az f függvénynek a $c \in I \subseteq D(f)$ pontban **abszolút (globális) maximuma** (**abszolút minimuma**) van az I intervallumra nézve, ha minden $x \in I$ esetén

$$f(x) \leq f(c) \quad (f(x) \geq f(c))$$

- A Weierstrass-tétel értelmében, ha f folytonos az $[a, b]$ (korlátos és zárt) intervallumon, akkor van minimuma és maximuma.
- Következésképpen a folytonos f -nek abszolút szélsőértéke a kritikus pontokban vagy az intervallum a, b végpontjaiban lehet, és ezek közül a legnagyobb fv.-értékűben van a maximuma, a legkisebb fv.-értékűben a minimuma.



- kritikus pont: f nem differenciálható
- kritikus pont: f deriváltja 0
- intervallum végpontja
- abszolút (globális) szélsőérték

Példa

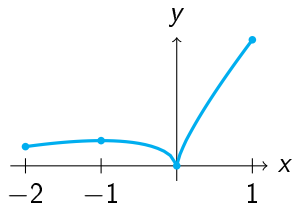
Határozzuk meg az $f(x) = x^{2/3} + \frac{2}{3}x$ függvény abszolút szélsőérték helyeit a $[-2, 1]$ intervallumon!

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3} \implies \text{ez nincs értelmezve az } x = 0 \text{ helyen}$$

$$f'(x) = 0 \implies x = -1$$

A kritikus pontok $x = -1$, $x = 0$, a végpontok $x = -2$, $x = 1$:

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	$\sqrt[3]{4} - \frac{4}{3}$ ≈ 0.254	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
			MIN	MAX



Középértéktételek

Tétel (Rolle-tétel)

Ha f folytonos $[a, b]$ -n, diffható (a, b) -n és $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $c \in (a, b)$, hogy $f'(c) = 0$.

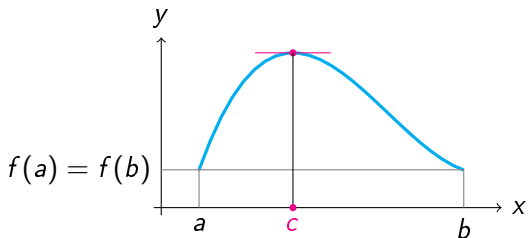
Bizonyítás

f folytonos $[a, b]$ -n, ezért van abszolút maximuma és minimuma. Mivel f diffható (a, b) -n, ezért ezeket értékként

- vagy a végpontokban
- vagy olyan c belső pontban veszi fel, ahol $f'(c) = 0$.

Ha f a minimum és a maximum legalább egyikét (a, b) -ben veszi fel, akkor ott $f'(c) = 0$.

Ha a maximumot és a minimumot is a végpontokban veszi fel, akkor $f(a) = f(b)$ miatt a függvény konstans, így mindenütt 0 a derivált.



Példa

Igazoljuk, hogy az $f(x) = x^5 + 4x^3 + 3x + 1$ függvénynek pontosan 1 valós gyöke van!

$$f'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f minden valós helyen differenciálható (és így folytonos is). \implies Ha volna f -nek két zérushelye, akkor a Rolle-tétel értelmében köztük valahol 0 lenne a derivált. \implies Legfeljebb egy zérushelye lehet.

Ugyanakkor f folytonos és $f(-1) = -7$, $f(1) = 9$, tehát a Bolzano-tétel szerint a $(-1, 1)$ intervallumon f -nek van zérushelye.

Tétel (Lagrange-tétel)

Ha f folytonos $[a, b]$ -n és diffható (a, b) -n, akkor van olyan $c \in (a, b)$, amelyre $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Bizonyítás

Legyen g az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokra fektetett szelőegyenes:

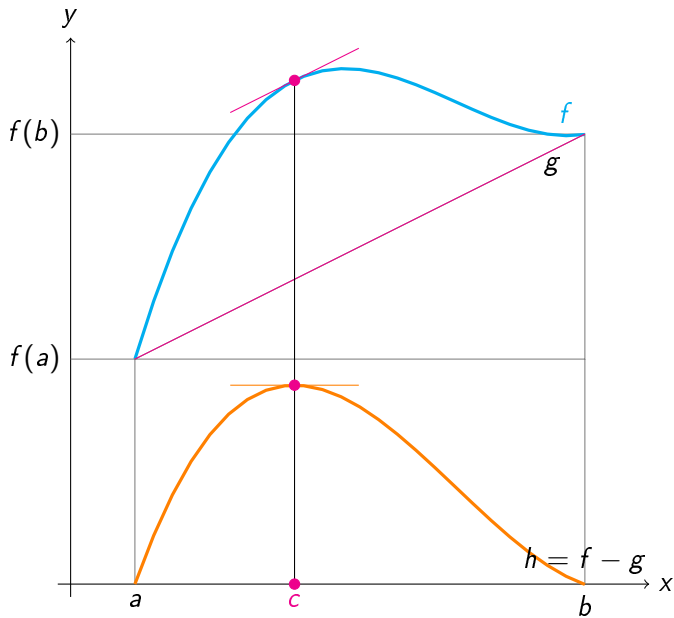
$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Alkalmazzuk a $h(x) = f(x) - g(x)$ függvényre a Rolle-tételt:

- $h(a) = h(b) = 0$,

- $h'(x) = \left(f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)' = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$\implies \exists c \in (a, b), \text{ ahol } h'(c) = 0 \implies h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$



Következmény

Ha minden $x \in (a, b)$ pontban $f'(x) = 0$, akkor f konstans az (a, b) intervallumon (valamely C számra $f(x) = C$).

Bizonyítás

Kontrapozícióval bizonyítunk: ha f nem konstans, akkor nem lehet a deriváltja mindenütt 0.

Ha f nem konstans, van olyan $p, q \in (a, b)$, hogy $f(p) \neq f(q)$.

Ezekre alkalmazva a Lagrange-tételt, kapunk egy olyan $c \in (p, q)$ értéket, hogy

$$f'(c) = \frac{f(p) - f(q)}{p - q} \neq 0,$$

tehát ezen a $c \in (p, q) \subseteq (a, b)$ helyen $f'(c) \neq 0$.

Következmény

Ha $f'(x) = g'(x)$ az (a, b) intervallumon, akkor van olyan C szám, hogy az (a, b) intervallumon $f(x) = g(x) + C$, azaz $f - g$ konstans.

Bizonyítás

A $h(x) = f(x) - g(x)$ függvény deriváltja $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, így $h(x) = C$, azaz $f(x) = g(x) + C$.

Példa

Melyik az a függvény, amelyiknek $\cos x$ a deriváltja?

Minden $\sin x + C$ alakú függvény, ahol C tetszőleges konstans.

Tétel (Cauchy-féle középértéktétel)

Ha f és g folytonosak $[a, b]$ -n, diffhatóak (a, b) -n és g' -nek nincs zérushelye (a, b) -n, akkor van olyan $c \in (a, b)$, hogy $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Bizonyítás

$g(a) \neq g(b)$, mert egyébként a Rolle-tétel szerint létezne olyan $c \in (a, b)$, hogy $g'(c) = 0$, de ezt a feltételek közt kizártuk.

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

h folytonos és diffható, $h(a) = h(b) = 0$, $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x)$

Alkalmazzuk a h függvényre a Rolle-tételt \implies

$$\exists c \in (a, b), \text{ ahol } h'(c) = 0 \implies \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

L'Hospital- vagy l'Hôpital-szabály

Ha az f és g függvény határértékét ismerjük c -ben, abból még nem mindig tudjuk meghatározni pl. az $f \pm g$, fg , f^g, \dots függvények határértékét c -ben.

Határozatlan alakok: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 .

Tétel (l'Hospital-szabály)

Legyen f és g két olyan valós függvény, melyek

- diffhatóak egy I nyílt intervallumon (kivéve esetleg egy a pontot)
- $g'(x) \neq 0$, ha $a \neq x \in I$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ vagy $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ mindegyike $\pm\infty$
- és létezik az $L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték.

Ekkor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Megjegyzés

Az előző tételben a és L lehet $\pm\infty$ is, sőt a tétel féloldali határértékekre is igaz.

Bizonyítás (l'Hospital-szabály)

Az $x \rightarrow a^+$, $f(a) = g(a) = 0$ esetet igazoljuk.

Alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt az $[a, x]$ intervallumra: létezik olyan $c_x \in (a, x)$, hogy

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Mivel $f(a) = g(a) = 0$, ezért $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Ha $x \rightarrow a^+$, akkor $c_x \rightarrow a^+$ is fönnáll, ezért

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c_x \rightarrow a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Példa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3}{e^{2x}} \stackrel{L'H(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{2e^{2x}} \stackrel{L'H(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4e^{2x}} = 0$$

Példa

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{L'H(\frac{-\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

Példa

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \stackrel{L'H(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \stackrel{L'H(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Példa

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\ln(1+x)})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x)}$$

A kitevőben: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{L'H(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$

Tehát: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e.$

Általánosan: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \quad (k \in \mathbb{R})$

$k = 0$ esetén $\lim_{x \rightarrow 0} 1^x = 1 = e^0$, egyébként

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}} \right)^k = \lim_{\frac{k}{x} \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}} \right)^k = e^k$$

Függvények nagyságrendje

Definíció

Ha f és g olyan függvények, melyekre $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, akkor f **kisebb nagyságrendű** mint g ($f \ll g$), ha $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Példa

- log. függvény \ll hatvány (polinom), ugyanis, ha $k > 0$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} \stackrel{L'H(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{k} x^{-k} = 0$$

- hatvány (polinom) \ll exp. függvény, ugyanis ha $n > 0$ egész, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} &\stackrel{L'H(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \stackrel{L'H(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} \stackrel{L'H(\infty)}{=} \\ \dots &\stackrel{L'H(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!x}{e^x} \stackrel{L'H(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0 \end{aligned}$$

Amire figyelni kell a l'Hospital-szabály alkalmazásánál

- 1 Csak határozatlan alakokra használható $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$!

Példa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1+x} = 0, \text{ miközben } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(1+x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

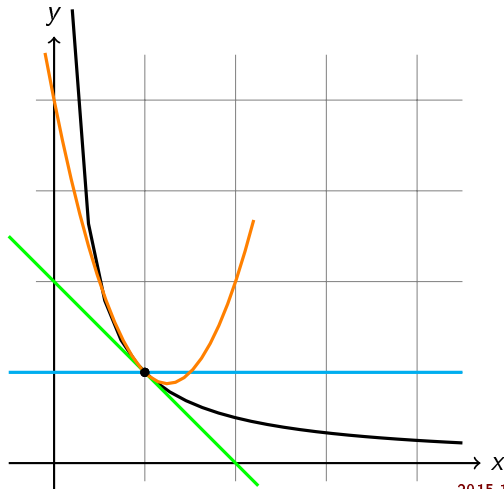
- 2 Fontos, hogy létezzen a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték!

Példa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x} = 1, \text{ miközben a } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} \text{ határérték nem létezik.}$$

Taylor-polinom

Szeretnénk egy (esetleg nehezen kiszámítható) függvényt kis fokú polinomokkal közelíteni egy pont közelében.



Taylor-polinom

Definíció

Legyen f egy valós függvény, mely n -szer differenciálható a c pontban. Ekkor a

$$T_{f,c,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k =$$

$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

polinomot az f függvény c körüli n -edrendű Taylor-polinomjának nevezzük.

Példa

$$\begin{array}{l} f(x) = \sin x \\ c = 0 \\ n = 3 \end{array} \implies \begin{array}{l} \sin 0 = 0 \\ \sin' 0 = \cos 0 = 1 \\ \sin'' 0 = -\sin 0 = 0 \\ \sin''' 0 = -\cos 0 = -1 \end{array} \implies T_{\sin x, 0, 3}(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

Tétel

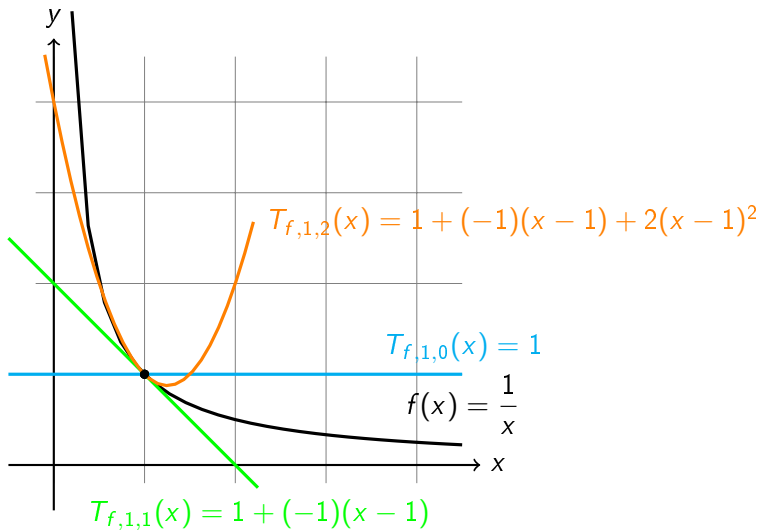
Ha f egy valós függvény, amely n -szer differenciálható a c pontban, és $T(x) := T_{f,c,n}(x)$ az f függvény c körüli n -edfokú Taylor-polinomja, akkor $T^{(k)}(c) = f^{(k)}(c)$ minden $0 \leq k \leq n$ -re.

Bizonyítás

A $T(x)$ k -szoros deriválásánál a k -nál kisebb fokú tagok eltűnnek (minden deriválással eggyel csökken a polinom foka), a k -nál nagyobb fokú tagok k -adik deriváltja pedig $(x - c)$ többszöröse, tehát a c -beli helyettesítési értékük 0. Így

$$T^{(k)}(c) = \left(\frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k \right)^{(k)} \Big|_{x=c} =$$

$$\frac{f^{(k)}(c)}{k!} k(k-1) \cdots 1 \cdot (x - c)^0 \Big|_{x=c} = f^{(k)}(c).$$



Tétel (Taylor-tétel)

Ha f egy valós függvény, mely n -szer differenciálható a c pontban, akkor létezik egy olyan $h_n(x)$ valós függvény, hogy

$$f(x) = T_{f,c,n}(x) + h_n(x)(x - c)^n \text{ és } \lim_{x \rightarrow c} h_n(x) = 0.$$

A fenti formulában a $h_n(x)(x - c)^n$ tagot az n -edrendű Taylor-polinom Peano-féle maradéktagjának nevezzük.

Bizonyítás

Legyen $T(x) := T_{f,c,n}$. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow c} h_n(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - T(x)}{(x - c)^n} = 0$$

Bizonyítás (folytatás)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - T(x)}{(x - c)^n} \stackrel{L'H(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - T'(x)}{n(x - c)^{n-1}} \stackrel{L'H(\frac{0}{0})}{=} \dots \stackrel{L'H(\frac{0}{0})}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}(x)}{n!(x - c)}, \text{ ahol azért alkalmazhattuk minden lépésben a}$$

l'Hospital-szabályt, mert $f^{(k)}$ differenciálhatósága miatt $f^{(k)}$ folytonos is c -ben, és $f^{(k)}(c) = T^{(k)}(c)$ minden $k \leq n - 1$ -re, tehát mindegyik limesz $\frac{0}{0}$ alakú.

Az utolsó limesz (az $\frac{1}{n!}$ szorzó nélkül):

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f^{(n-1)}(x) - (f^{(n-1)}(c) + f^{(n)}(c)(x - c))}{x - c} =$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(c)}{x - c} - f^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) - f^{(n)}(c) = 0.$$

Összefoglalás

- Lokális és abszolút szélsőértékek
- Lokális szélsőérték és a derivált kapcsolata
- Rolle-, Lagrange- és Cauchy-féle középértéktétel és következményeik
- L'Hospital-szabály
- Függvények nagyságrendje
- Taylor-polinom és Taylor-tétel