Analitikus térgeometria

Wettl Ferenc előadása alapján

2015.09.21.

Definíció

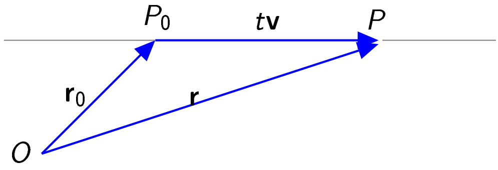
Az adott P_0 ponton áthaladó e egyenes irányvektorának nevezünk minden olyan $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektort, amely párhuzamos az e egyenessel.

Tétel (Egyenes paraméteres vektoregyenlete)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes paraméteres (explicit) vektoregyenlete

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < \infty$$

ahol $\mathbf{r}$ az e egyenes egy $P(x, y, z)$ pontjának helyvektora, míg $\mathbf{r}_0$ a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponté.



Megjegyzés

Az előző egyenlet vektorait koordinátás alakba írva:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct).$$

Tétel (Egyenes paraméteres egyenletrendszere)

Ha a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pont egy egyenes egyik pontja, irányvektora pedig $\mathbf{v} = (a, b, c)$, akkor az egyenes paraméteres (explicit) egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

ahol a t paraméter az összes valós számon végigfut.

Példa (Egy ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes)

Legyen $P_0(2,-1,3)$, $\mathbf{v}=(4,3,0)$.

Megoldás

$x=2+4t,\ y=-1+3t,\ z=3.$

Példa (Két ponton átmenő egyenes)

Legyen $P_0(2,-1,3)$, $P_1(6,2,3)$.

Megoldás

$\overrightarrow{P_0P_1}=(4,3,0).$

$x=2+4t,\ y=-1+3t,\ z=3.$

Az egyenes paraméteres egyenletrendszeréből a t paramétert kiküszöbölhetjük:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned} \quad \overset{a\neq 0, b\neq, c\neq 0}{\Rightarrow} \quad \begin{aligned} t &= \frac{x - x_0}{a} \\ t &= \frac{x - y_0}{b} \\ t &= \frac{z - z_0}{c} \end{aligned} \Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{x - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Ez az egyenes paramétermentes (implicit) egyenletrendszere.

Megjegyzés

Ha az irányvektor valamelyik koordinátája 0 (vagyis az irányvektor párhuzamos valamelyik koordinátasíkkal), akkor a megfelelő egyenlet a paraméteres egyenletrendszerben eleve nem tartalmazza a t paramétert, nem kell kiküszöbölni.

Példa (Egyenes mentén egyenletesen mozgó pont mozgásának leírása)

A $P_0(2,-1,3)$ pontból 10 távolságegység/időegység sebességgel az $\mathbf{b}=(4,3,0)$ irányban haladva, hová jutunk 6 időegység alatt?

Megoldás

Átírva a vektoregyenletet, annak fizikai értelmezés adható:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+t\,|\mathbf{v}|\,\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}=\mathbf{r}_0+t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor}).$$

Most a sebesség $=10$, egységvektor $=(4/5,3/5,0)$, hisz $|\mathbf{b}|=5$.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t)&=\mathbf{r}_0+t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor})\\ \mathbf{r}(6)&=(2,-1,3)+6\cdot 10\cdot(4/5,3/5,0)=(50,35,3).\end{aligned}$$

(E példában a sebességvektor $\mathbf{v}=(8,6,0)$ az az irányvektor, mely a vektoregyenlet képletében szereplő $\mathbf{v}$ vektorral egybeesik.)

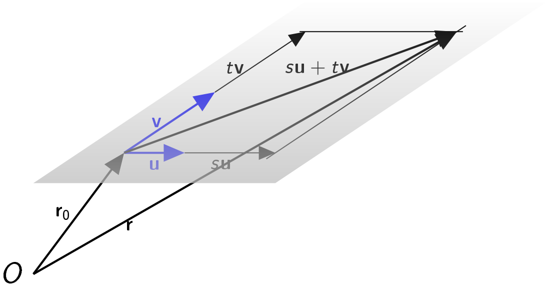
Tétel (Sík paraméteres egyenlete)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó ($\mathbf{r}_0$ helyvektorú), az $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok által kifeszített sík paraméteres (explicit) vektoregyenlete:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}.$$

egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + su_1 + tv_1 \\ y &= y_0 + su_2 + tv_2 \\ z &= z_0 + su_3 + tv_3 \end{aligned}$$



Definíció

Egy $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ vektort az S sík normálvektorának nevezzük, ha merőleges rá.

Tétel (Sík paramétermentes egyenlete)

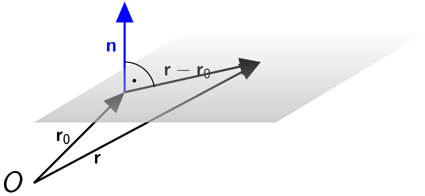
A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó ($\mathbf{r}_0$ helyvektorú), $\mathbf{n} = (A, B, C)$ ($\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) normálvektorú sík paramétermentes (implicit)

vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$

koordinátás alak: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$

árendezve: $Ax + By + Cz = D,$

ahol $P(x, y, z)$ a sík egy tetszőleges pontja ($\mathbf{r}$ helyvektorral), és $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$.



Példa (Sík egyenletének felírása)

$P_0(1,-2,3)$, $\mathbf{u}=(3,0,2)$, $\mathbf{v}=(1,-3,0)$.

Megoldás

Paraméteres vektoregyenlet és egyenletrendszer:

$(x,y,z)=(1,-2,3)+s(3,0,2)+t(1,-3,0)$

$x=1+3s+t$

$y=-2-3t$

$z=3+2s$

$\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(6,2,-9)$.

implicit vektoregyenlet: $(6,2,-9)\cdot(x-1,y+2,z-3)=0$,

koordinátás alak: $6(x-1)+2(y+2)-9(z-3)=0$,

$\Longrightarrow 6x+2y-9z=-25$.

Példa (Három ponton átmenő sík egyenlete)

$P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$, $R(0,0,3)$.

Megoldás

A paraméteres egyenletrendszerhez $\overrightarrow{PQ} = (-1,2,0)$, $\overrightarrow{PR} = (-1,0,3)$:

$(x,y,z) = (1,0,0) + s(-1,2,0) + t(-1,0,3)$

$x = 1 - s - t$

$y = 2s$

$z = 3t$

A normálvektor

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (6,3,2),$$

így az koordinátás egyenlet $6(x-1) + 3(y-0) + 2(z-0) = 0 \implies$
$6x + 3y + 2z = 6$

Két egyenes kölcsönös helyzete:

- 0 közös pont - a két egyenes kitérő vagy párhuzamos, de nem azonos
- 1 közös pont - a két egyenes metsző
- végtelen sok közös pont - a két egyenes azonos

Példa (Két egyenes metszéspontja)

e_1: $x = 1 + 2t, \ y = 1 + 3t, \ z = 1 + t$
e_2: $x = 2 + t, \ y = -t, \ z = 2 + t$

Megoldás

Az második egyenletrendszerben a paramétert s-re cseréljük, majd az egyes koordinátákat egyenlővé tesszük:

$1 + 2t = 2 + s$
$1 + 3t = -s$
$1 + t = 2 + s$

Az egyenletrendszert megoldva $t = 0, s = -1$ (Ellenőrzés!), majd behelyettesítve $t = 0$-t e_1-be (vagy $s = -1$-et e_2-be), a metszéspont $(1, 1, 1)$.

Sík és egyenes kölcsönös helyzete:

- 0 közös pont - az egyenes párhuzamos a síkkal
- 1 közös pont - az egyenes döfi a síkot
- végtelen sok közös pont - az egyenes része a síknak

Példa (Sík és egyenes metszéspontja)

S: $x + 2y + 2z = 3$, e: $x = 3 - t,\ y = 2 + 2t,\ z = 1$.

Megoldás

Behelyettesítjük az egyenes egy pontjának koordinátáit a sík egyenletébe. Az egyenes egy pontja: $(3 - t, 2 + 2t, 1)$, behelyettesítve: $(3 - t) + 2(2 + 2t) + 2 \cdot 1 = 3$, azaz $t = -2$. Innen a közös pont: $(5, -2, 1)$. Ellenőrzés!

Két sík kölcsönös helyzete:

- 0 közös pont - a két sík párhuzamos
- a két sík egy közös egyenesben metszi egymást
- a két sík azonos

Példa (Két sík metszésvonalának egyenletrendszere)

S_1: $2x + z = 3$, S_2: $3y + z = 5$

Megoldás

S_1 normálvektora: $\mathbf{n}_1 = (2, 0, 1)$, S_2 normálvektora: $\mathbf{n}_2 = (0, 3, 1)$,
A metszésvonal irányvektora $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (-3, -2, 6)$. Kell keresni még egy közös pontot, azaz a két egyenletből álló egyenletrendszer egy megoldását, ami biztosan létezik, ha a két sík nem párhuzamos. Legyen például $x = -1$, ekkor $z = 5$ és $y = 0$. Az egyenes egyenletrendszere:
$x = -1 - 3t,\ \ y = -2t,\ \ z = 5 + 6t.$

Definíció (Alakzatok távolsága)

Ha két alakzat pontjai páronkénti távolságának létezik a minimuma, akkor ezt hívjuk a két alakzat **távolságának**, vagyis ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két alakzat a térben, akkor

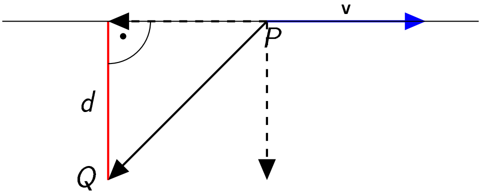
$$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = min\{d(x,y) \mid x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}\}.$$

Megjegyzés

Amennyiben a szóban forgó alakzatok pontok, egyenesek és síkok, akkor a fenti módon definiált távolság mindig létezik.

Tétel (Pont és egyenes távolsága)

A Q pont és a P ponton átmenő **v** irányvektorú egyenes távolsága megegyezik a $\overrightarrow{PQ}$ vektor **v** vektorra merőleges komponensének hosszával.



$$d = \left| \overrightarrow{PQ} - \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \right|$$

Példa

Mennyi a $Q(-3,4,-3)$ pont és az $e: \; x = 1-4t, \; y = 2, \; z = -3t$ egyenes távolsága?

Megoldás

$\mathbf{v} = (-4,0,-3), P(1,2,0)$, Q(-3,4,-3) $\Longrightarrow \overrightarrow{PQ} = (-4,2,-3)$,
$\mathbf{v}$-vel párhuzamos komponens:

$$\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{(-4,2,-3)\cdot(-4,0,-3)}{(-4,0,3)\cdot(-4,0,-3)}(-4,0,-3) = \frac{25}{25}(-4,0,-3)$$

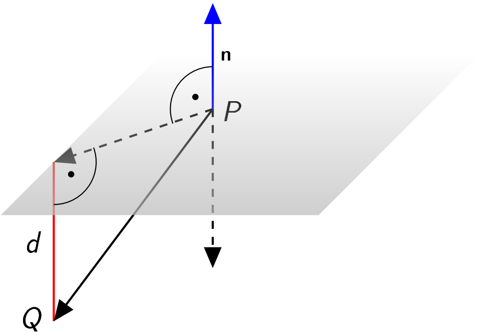
$\mathbf{v}$-re merőleges komponens

$$\overrightarrow{PQ} - (-4,0,-3) = (0,2,0)$$

Ennek hossza a távolság, vagyis $d = 2$.

Tétel (Pont és sík távolsága)

A Q pont és a P ponton átmenő $\mathbf{n}$ normálvektorú sík távolsága megegyezik a $\overrightarrow{PQ}$ vektor $\mathbf{n}$ vektorral párhuzamos komponensének hosszával.



$$d = \left| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} \right| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

Példa (Pont és sík távolsága)

$Q(0,-1,1)$, $\mathcal{S}$: $x+2y+2z=3$.

Megoldás

A sík normálvektora $\mathbf{n}=(1,2,2)$. Legyen P az $\mathcal{S}$ sík egy tetszőleges pontja, pl. $P(-1,1,1)$. Ekkor $\overrightarrow{PQ}=(1,-2,0)$, vagyis a Q pont távolsága a síktól

$$d=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}=\frac{|(1,-2,0)\cdot(1,2,2)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1.$$

Definíció

Az $Ax + By + Cz = D$ egyenletű sík normálegyenlete:

$$\frac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0.$$

Normálegyenlet esetén a normálvektor egységvektor.

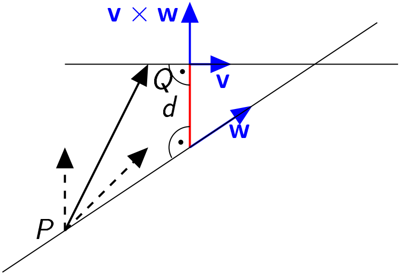
Egy $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pont és az $\mathcal{S} : Ax + By + Cz - D = 0$ sík (előjeles) távolságát úgy is megkaphatjuk, ha a P_0 pont koordinátáit behelyettesítjük a sík normálegyenletének bal oldalába, vagyis:

$$d(P_0, \mathcal{S}) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Az előjel azt jelzi, hogy a pont a sík melyik oldalán van.

Tétel (Két nem párhuzamos egyenes távolsága)

A Q ponton átmenő $\mathbf{v}$ irányvektorú és a P ponton átmenő $\mathbf{w}$ irányvektorú egyenes távolsága megegyezik a $\overrightarrow{PQ}$ vektor $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ vektorral párhuzamos komponensének hosszával.



$$d = \left| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})} (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \right| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{|(\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}$$

Tétel (Párhuzamos síkok és egyenesek távolsága)

- Egy e egyenes távolsága egy vele párhuzamos egyenestől vagy síktól megegyezik az e egyenes egy tetszőleges pontjának az adott egyenestől vagy síktól vett távolságával.
- Két párhuzamos sík távolsága megegyezik az egyik sík tetszőleges pontjának a másik síktól vett távolságával.

Tétel (Síkok és egyenesek egymással bezárt szögei)

- Két egyenes egymással bezárt szöge megegyezik az irányvektoraik szögével.
- Két sík egymással bezárt szöge megegyezik a normálvektoraik szögével.
- Egy egyenes és egy sík szöge $|\frac{\pi}{2} - \alpha|$, ahol α az egyenes irányvektorának és a sík normálvektorának a szöge.

Összefoglalás

- Egyenes és sík különböző egyenletei
- térbeli alakzatok közös pontjai
  - két egyenes metszete
  - egyenes és sík metszete
  - két sík metszete
- térbeli alakzatok egymástól vett távolsága
  - pont távolsága egyenestől és síktól
  - két kitérő egyenes távolsága
  - párhuzamos egyenesek és síkok közötti távolságok
- síkok és egyenesek egymással bezárt szögei