

# Elemi függvények

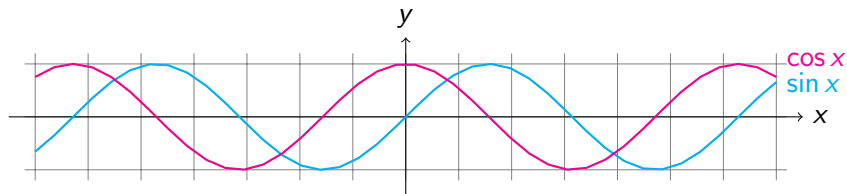
2015.10.07.

- 1 Függvénytulajdonságok
- 2 Trigonometrikus függvények
  - A  $\sin$  és  $\cos$  függvények
  - A  $\operatorname{tg}$  és  $\operatorname{ctg}$  függvények
- 3 Polinomok
  - Polinomok maradékos osztása
  - Polinomok gyöktényezői
  - Horner-módszer
  - Racionális gyökteszt
  - Racionális törtfüggvények
- 4 Az exponenciális függvény
- 5 Hiperbolikus függvények
  - Az  $\operatorname{sh}$  és  $\operatorname{ch}$  függvények
  - A  $\operatorname{th}$  és  $\operatorname{cth}$  függvények
- 6 Összefoglalás

# Függvények tulajdonságai

- $f$  periodikus  $p$  periódussal, ha  $f(x) = f(x + p)$  minden  $x$  értékre
- Paritás
  - $f$  páros függvény, ha  $f(-x) = f(x)$  minden  $x$  értékre - grafikonja tengelyesen szimmetrikus az  $y$  tengelyre
  - $f$  páratlan függvény, ha  $f(-x) = -f(x)$  minden  $x$  értékre - grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra
- Monotonitás
  - $f$  monoton növekvő, ha  $x < y$  esetén  $f(x) \leq f(y)$
  - $f$  szigorúan monoton növekvő, ha  $x < y$  esetén  $f(x) < f(y)$
  - $f$  monoton csökkenő, ha  $x < y$  esetén  $f(x) \geq f(y)$
  - $f$  szigorúan monoton csökkenő, ha  $x < y$  esetén  $f(x) > f(y)$

# A szinusz és a koszinusz függvény



- $\text{ÉT} = \mathbb{R}$ ,  $\text{ÉK} = [-1, 1]$  mindkét függvény esetében ( $x$ -et mindig radiánban mérjük)
- Periodikusság:  $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ ,  $\cos x = \cos(x + 2\pi)$
- Paritás:
  - $\sin x$  páratlan:  $\sin(-x) = -\sin x$
  - $\cos x$  páros:  $\cos(-x) = \cos x$

## Állítás

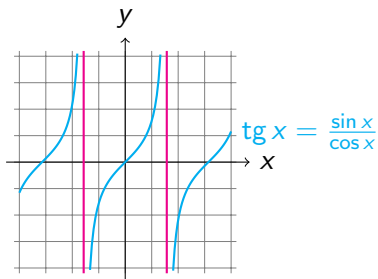
A  $\sin x$  és  $\cos x$  függvény minden  $c \in \mathbb{R}$  pontban folytonos.

## Bizonyítás

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} \sin x &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(c + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin c \cos h + \cos c \sin h = \\ &(\sin c) \cdot 1 + (\cos c) \cdot 0 = \sin c\end{aligned}$$

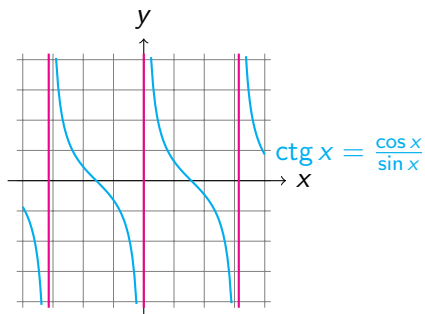
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} \cos x &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(c + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \cos c \cos h - \sin c \sin h = \\ &(\cos c) \cdot 1 - (\sin c) \cdot 0 = \cos c\end{aligned}$$

# A tg és ctg függvények



- $\text{ÉT} = \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\text{ÉK} = \mathbb{R}$
- Periodikusság:  $\text{tg } x = \text{tg}(x + \pi)$
- Paritás: páratlan:  $\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$
- Szig. mon. növekedő a  $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$  intervallumon ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- Aszimptoták:  $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ -ben,  $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \rightarrow (2k+1)\frac{\pi}{2}^-} \text{tg } x = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow (2k+1)\frac{\pi}{2}^+} \text{tg } x = -\infty$$



- $\text{ÉT} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\text{ÉK} = \mathbb{R}$
- Periodikusság:  $\text{ctg } x = \text{ctg}(x + \pi)$
- Paritás: páratlan:  $\text{ctg}(-x) = -\text{ctg } x$
- Szig. mon. csökkenő a  $(k\pi, (k+1)\pi)$  intervallumon ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- Aszimptoták:  $x = k\pi$ -ben,  $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \rightarrow k\pi^-} \text{tg } x = -\infty \text{ és } \lim_{x \rightarrow k\pi^+} \text{tg } x = \infty$$

# Polinomok

## Definíció

A  $P(x)$  valós függvényt polinomnak nevezzük, ha alkalmas  $a_0, \dots, a_n$  valós számokkal  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  alakba írható. Az  $a_i$  értékeket a polinom együtthatóinak nevezzük. Ha  $a_n \neq 0$ , akkor azt mondjuk, hogy a  $P(x)$  polinom foka  $n$ , vagyis  $\deg P = n$ .

- Volt: ha  $P$  egy polinom, akkor minden  $c \in \mathbb{R}$ -ben folytonos
- Határértékek  $\pm\infty$ -ben  
Tegyük fel, hogy a  $P(x)$  polinom  $n$  foka legalább 1. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n,$$

vagyis a végtelenekben vett határérték csak a legnagyobb kitevőjű tagtól függ.



# Polinomok maradékos osztása

## Állítás

Minden  $f(x)$  és  $g(x) \neq 0$  polinomokhoz léteznek egyértelmű  $h(x)$  és  $m(x)$  polinomok, hogy

$$f(x) = h(x)g(x) + m(x) \text{ és } \deg m < \deg g \text{ vagy } m = 0.$$

$h(x)$ -et az  $f$  polinom  $g$ -vel vett maradékos osztása során kapott hányadosnak hívjuk, míg  $m(x)$  az osztási maradék.

**Kiszámítása:**  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ,  $g(x) = b_k x^k + \dots + b_0$   
Ekkor  $h(x)$  első tagja  $\frac{a_n}{b_k} x^{n-k}$  lesz, és  $f$ -et helyettesítjük az

$$f^*(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_k} x^{n-k} g(x)$$

polinommal. Ezt az eljárást addig folytatjuk, míg az osztandó polinom foka kisebb nem lesz mint az osztó polinom foka.

## Példa

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1, g(x) = x^2 + 3$$

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + x^2 - 3x + 1) : (x^2 + 3) = x + 1 \\
 - (x^3 \phantom{+ x^2} + 3x) \\
 \hline
 \phantom{x^3} + x^2 - 6x + 1 \\
 - (x^2 \phantom{- 6x} + 3) \\
 \hline
 \phantom{x^3} \phantom{+ x^2} - 6x - 2
 \end{array}$$

Tehát:

$$x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x + 1)(x^2 + 3) + (-6x - 2)$$

# Polinomok gyöktényezői

## Tétel

Ha  $f(x)$  egy polinom és  $c$  gyöke  $f(x)$ -nek (azaz  $f(c) = 0$ ), akkor létezik egy  $h(x)$  polinom, hogy  $f(x) = (x - c)h(x)$ .

## Bizonyítás

Maradékos osztás  $\implies$  léteznek  $h(x)$ ,  $m(x)$  polinomok, hogy

$$f(x) = h(x)(x - c) + m(x),$$

ahol  $\deg m(x) < \deg(x - c) = 1$  vagy  $m = 0$ . Ekkor viszont  $m(x)$  csak egy  $m$  konstans lehet. Behelyettesítve  $c$ -t:

$$0 = f(c) = h(c)(c - c) + m = m,$$

vagyis valóban  $f(x) = (x - c)h(x)$ .

# Horner-módszer

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  maradékos osztása  $(x - c)$ -vel

A maradék éppen  $m = f(c)$ .

	$a_n$	$a_{n-1}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
	$\downarrow$	$\downarrow +$		$\downarrow +$	$\downarrow +$
$c$	$b_{n-1} = a_n$	$\rightarrow \cdot c \quad b_{n-2} = a_{n-1} + c \cdot a_n$	$\dots$	$\rightarrow \cdot c \quad b_0 = a_1 + c \cdot *$	$\rightarrow \cdot c \quad f(c) = a_0 + c \cdot b_0$

Ekkor  $f(x) = (x - c)(b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0) + f(c)$ , hiszen

beszorozva, és összehasonlítva  $x^i$  együtthatóját a két oldalon

$$a_i = b_{i-1} - c \cdot b_i \implies b_{i-1} = a_i + c \cdot b_i,$$

valamint  $x^0$  együtthatóját

$$a_0 = -c \cdot b_0 + f(c) \implies f(c) = a_0 + c \cdot b_0.$$

## Példa

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \text{ és } c = 2.$$

$f(2) = 0 \implies$  kiemelhető belőle  $(x - 2)$

Horner-módszerrel:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ c = 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Ennek megfelelően:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)(x^2 - x - 2).$$

# Racionális gyökteszt

## Állítás

Legyen  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  egy egész együtthatós polinom (vagyis  $a_i \in \mathbb{Z}$  minden  $i$ -re), és tegyük fel, hogy a  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  tovább már nem egyszerűsíthető racionális szám gyöke  $f$ -nek. Ekkor  $p$  osztója  $a_0$ -nak és  $q$  osztója  $a_n$ -nek.

## Bizonyítás

$(p, q) = 1$  (relatív prímelek, nincs közös osztójuk)

$$0 = f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 \quad / \cdot q^n$$

$$0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$$

## Bizonyítás (folytatás)

$$0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$$

$$p \mid 0 \text{ és } p \mid a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} \implies p \mid a_0 q^n$$

$$q \mid 0 \text{ és } q \mid a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n \implies q \mid a_n p^n$$

Mivel  $(p, q) = 1$ , ezért szükségképpen  $p \mid a_0$  és  $q \mid a_n$ .

## Példa

Van-e racionális gyöke az  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  polinomnak?

Ha  $\frac{p}{q}$  gyök  $((p, q) = 1)$ , akkor  $p \mid 4$  és  $q \mid 1$

$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4$  és  $q = \pm 1$ , vagyis a lehetséges racionális gyökök  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ . Ezeket kipróbálva azt kapjuk, hogy 2 és  $-1$  a racionális gyökök.

# Racionális törtfüggvények

## Definíció

$f(x)$ -et racionális törtfüggvénynek nevezünk, ha alkalmas  $p(x)$  és  $q(x)$  polinomokkal  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ .

- Mindenhol folytonos, ahol értelmezve van (ahol a nevező nem 0).
- Ha  $\deg p \geq \deg q$ , akkor léteznek  $h(x)$  és  $m(x)$  polinomok, hogy

$$p(x) = h(x)q(x) + m(x) \text{ és } \deg m < \deg q.$$

Ekkor:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{m(x)}{q(x)},$$

ahol a második tag már egy olyan racionális törtfüggvény, ahol a számláló foka kisebb mint a nevező foka.



# Az exponenciális függvény

## Állítás

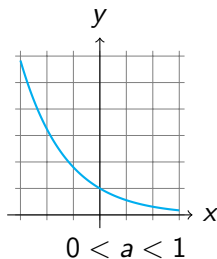
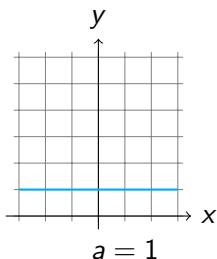
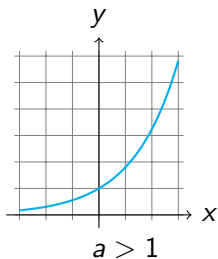
Ha  $a > 0$  valós szám, akkor egyértelműen létezik egy mindenhol folytonos valós  $f$  függvény, hogy minden racionális  $r$  pontra  $f(r) = a^r$ .

## Definíció

A fenti állítás által garantált  $f$  függvényt  $a$  alapú exponenciális függvénynek nevezzük, és  $f(x) = a^x$ -szel jelöljük.

## Bizonyítás (Csak egyértelműség, a létezést később bizonyítjuk.)

Tegyük fel, hogy a feltételeket 2 folytonos függvény is teljesíti, legyenek ezek  $f_1$  és  $f_2$ . Ekkor a  $g = f_1 - f_2$  függvényre igaz, hogy folytonos és minden racionális  $r$  helyen  $g(r) = 0$ . A folytonosság miatt minden  $c$  értékre létezik a  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$  határérték, és  $g(c)$ -vel egyenlő. De bármely  $(c - \delta, c + \delta)$  intervallumban van racionális szám, és ott a függvény értéke 0, így a határérték csak 0 lehet. Vagyis  $g(c) = 0$  minden  $c$  értékre, tehát  $f_1 = f_2$ .

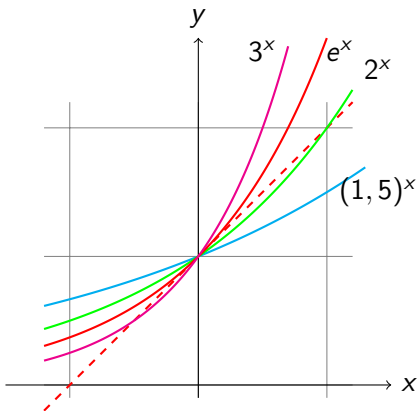


- Ha  $a > 1$ , akkor  $a^x$  szig. mon. növekedő  $\mathbb{R}$ -en;  
 $-\infty$ -ben 0-ba,  $\infty$ -ben  $\infty$ -be tart.
- Ha  $0 < a < 1$ , akkor  $a^x$  szig. mon. csökkenő  $\mathbb{R}$ -en;  
 $-\infty$ -ben  $\infty$ -be,  $\infty$ -ben 0-ba tart.
- $a^x > 0$  minden  $a > 0$  és  $x \in \mathbb{R}$  esetén
- Hatványazonosságok:
  - $a^x a^y = a^{x+y}$
  - $(a^x)^y = a^{xy}$
  - $(ab)^x = a^x b^x$

## Definíció

Kitüntetett szerepe van annak a hatványalaprak, amikor az  $a^x$  grafikonjának az érintője a 0-ban  $45^\circ$ -os szögben áll. Ennek az  $a$  alapnak a neve Euler-szám, és  $e$ -vel jelöljük.

Az  $e$  értéke közelítőleg  $2,71828\dots$



# Az sh és ch függvények

## Definíció

Színusz hiperbolikus:  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Koszínusz hiperbolikus:  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

- Folytonosak az egész  $\mathbb{R}$ -en.

- Paritás:

- $\operatorname{sh} x$  páratlan:  $\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{sh} x$

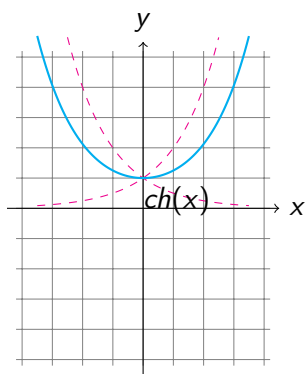
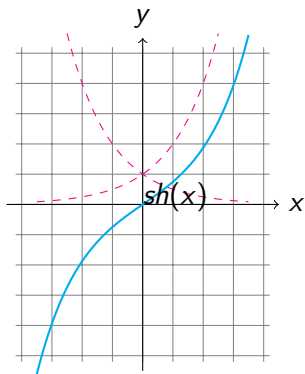
- $\operatorname{ch} x$  páros:  $\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch} x$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{sh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \infty \implies \text{ÉK} = \mathbb{R}$$

- $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2 + 2}{2} \geq 1, \operatorname{ch} 0 = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{ch} x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \infty \implies \text{ÉK} = [1, \infty)$$



Monotonitás:

- $sh x$  szig. mon. növe  $\mathbb{R}$ -en
- $ch x$  szig. mon. csökkenő  $(-\infty, 0]$ -n és szig. mon. növe  $[0, \infty)$ -en

## Állítás (Hiperbolikus azonosságok)

- 1  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
- 2  $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$
- 3  $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

## Bizonyítás (Csak (1)-et)

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

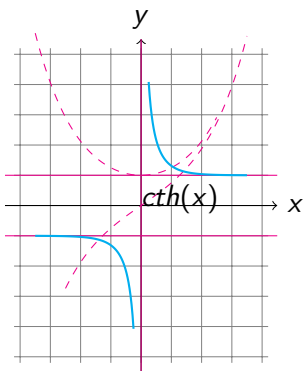
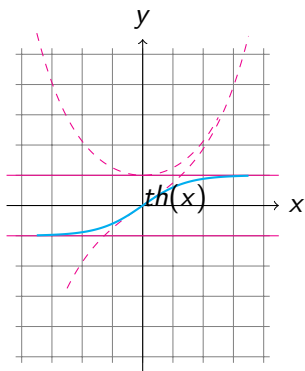
# A th és cth függvények

## Definíció

Tangens hiperbolikus:  $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$

Kotangens hiperbolikus:  $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$

- ÉT:  $D(\operatorname{th} x) = \mathbb{R}$ ,  $D(\operatorname{cth} x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Mindkét függvény folytonos az értelmezési tartománya minden pontjában.
- Mindkét függvény páratlan:  $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$ ,  $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th} x = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{th} x = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{cth} x = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{cth} x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cth} x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{cth} x = 1$



Monotonitás:

- $\text{th } x$  szig. mon. növény  $\mathbb{R}$ -en
- $\text{cth } x$  szig. mon. növény  $(-\infty, 0)$ -n és  $(0, \infty)$ -en

$\text{th } x$  értékészlete  $(-1, 1)$ ,  $\text{cth } x$  értékészlete  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .



# Összefoglalás

- Elemi függvények ( $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ ,  $a^x$ ,  $e^x$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{th} x$ ,  $\operatorname{cth} x$ ) és tulajdonságaik (ÉT, ÉK, folytonosság, paritás, monotonitás, határértékek)
- Polinomok
  - Polinomok maradékos osztása
  - Polinomok gyöktényezői, Horner-módszer
  - Racionális gyökteszt
  - Racionális törtfüggvények