Az exponenciális függvény és a logaritmus

2015.11.30.

A logaritmus mint integrálfüggvény

Az elemi függvényeknél nem bizonyítottuk, hogy az a^r $(r \in \mathbb{Q})$ függvénynek létezik folytonos kiterjesztése $\mathbb{R}$-re. Most ezt megtehetjük az integrál alkalmazásával.

Definíció

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0)$$

- Belátjuk, hogy $\log(x)$ diffható, szig. monoton növő fv. $(0, \infty)$-en;
- definiáljuk $\exp(x)$-et mint a $\log(x)$ inverz függvényét;
- belátjuk, hogy $\exp(x)$ $\big($illetve általánosabban $\exp(x \log(a))\big)$ az e^r (illetve a^r) folytonos kiterjesztése $\mathbb{Q}$-ról $\mathbb{R}$-re, így $\exp(x) = e^x$ és $\log(x) = \ln x$;
- bebizonyítjuk a logaritmus és a valós kitevőjű hatványozás műveleti tulajdonságait.

Tétel

log(x) differenciálható, és a deriváltja $\frac{1}{x}$.

Bizonyítás

$x > 1$-re az állítás a változó felső határú integrálok tételéből következik. $0 < x < 1$ esetén tekinthetjük log(x) helyett az $\frac{1}{x}$ valamely $0 < c < x$-nél kezdődő integrálfüggvényét: $\int_c^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Ez csak egy konstans összeadandóban ($\int_c^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$-ben) különbözik log($x$)-től, és alkalmazható rá az előbbi tétel (c, ∞)-en, így log(x) is diffható itt, és a deriváltja megegyezik $\frac{1}{x}$-szel.

Állítás ($\log(x)$ műveleti tulajdonságai)

1) $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.
2) $\log(a^r) = r\log(a)$ $\forall r \in \mathbb{Q}$-ra.

Bizonyítás

1) $\log(ab) - \log(a) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{a} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. A $t = au$, $\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}u$ helyettesítéssel ez tovább $= \int_1^{b} \frac{1}{au} a\,\mathrm{d}u = \int_1^{b} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \log(b)$.
2) 1) miatt $n \in \mathbb{N}^+$-ra
$\log(a^n) = \log(a \cdot a \cdots a) = \log(a) + \log(a) + \cdots + \log(a) = n\log(a)$,
$\log(a^0) = \log 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0 = 0 \cdot \log(a)$, és
$0 = \log 1 = \log(a^{-n} \cdot a^n) = \log(a^{-n}) + \log(a^n) \Rightarrow$
$\log(a^{-n}) = -\log(a^n) = -n\log(a)$. Végül $r = \frac{p}{q}$-ra ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$):
$q \cdot \log(a^{p/q}) = \log(a^p) = p\log(a) \Rightarrow \log(a^{p/q}) = \frac{p}{q}\log(a)$.

Állítás

$\log(x)$ szigorúan monoton függvény, amelynek értékkészlete $\mathbb{R}$.

Bizonyítás

$0 < a < b$-re

$\log(b) - \log(a) = \int_1^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geq (b-a)\frac{1}{b} > 0$, ugyanis $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{b}$ az $[a, b]$ intervallumon. Így $\log(a) < \log(b)$.

Ebből következik, hogy $c > 1$-re $\log(c) > \log(1) = 0$,
és a műveleti szabályok miatt

$$\left.\begin{array}{l} \log(c^n) = n\log(c) \text{ akármilyen nagy,} \\ \log(c^{-n}) = -n\log(c) \text{ akármilyen kicsi lehet,} \\ \text{és } \log(x) \text{ folytonos} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad R(\log) = \mathbb{R}.$$

Definíció

Legyen $\exp(x)$ a $\log(x)$ inverz függvénye. Ez az eddigiek alapján diffható fv. $\mathbb{R}$-en, amelynek deriváltja

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp(x))} = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x).$$

Korábban a^x-et mint az a^r $(x \in \mathbb{Q})$ függvény $\mathbb{R}$-re való folytonos kiterjesztését definiáltuk, és e az a szám volt (egyértelmű?), amelyre $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x \big|_{x=0} = 1$.

Tétel

$$\exp(x) = e^x \text{ és } \log(x) = \ln(x)$$

Bizonyítás

$r \in \mathbb{Q}$-ra és $a > 0$-ra $\exp(r \cdot \log(a)) = \exp(\log(a^r)) = a^r$,
így $\exp(x \log(a))$ az a^r $(r \in \mathbb{Q})$ fv. folytonos kiterjesztése, azaz

$$\exp(x \log(a)) = a^x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp(x \log(a)) = \exp(x \log(a)) \log(a) = a^x \log(a),$$

és $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x \Big|_{x=0} = \log(a) = 1 \iff a = \exp(1)$, vagyis $e = \exp(1)$.

Végül $\exp(x) = \exp(x \cdot \log(e)) = e^x$,

és $\log(x)$ az e^x inverz függvénye, $\ln x$.

A valós kitevőjű hatványozás műveleti szabályai

Tétel

1) $a^{xy} = (a^x)^y$
2) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
3) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ tetszőleges $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ számokra.

Bizonyítás

Az $a^x = \exp(x \log(a))$ definícióból következik a

$$\log(a^x) = x \log(a) \quad (a, b \in \mathbb{R},\ a > 0)$$

általánosítása a $\log(x)$ fv. 2. műveleti szabályának. A hatványazonosságokat beláthatjuk úgy, hogy a két oldal logaritmusát hasonlítjuk össze. Pl.

3) $\log((ab)^x) = x \log(ab) = x(\log(a) + \log(b)) = x \log(a) + x \log(b) = \log(a^x) + \log(b^x) = \log(a^x \cdot b^x)$.