

Folytonosság

Wettl Ferenc előadása alapján

2015.10.05.

- 1 Pontbeli folytonosság
 - Szakadási helyek
 - Folytonos kiterjesztés
- 2 Féloldali folytonosság
- 3 Intervallumon folytonos függvények
- 4 Összefoglalás

Definíció

Tegyük fel, hogy a valós f függvény értelmezve van valamely nemüres I nyílt intervallum minden pontjában. Ekkor azt mondjuk, hogy f **folytonos** a $c \in I$ pontban, ha a $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ határérték létezik, és megegyezik az $f(c)$ helyettesítési értékkel.

Megjegyzés

A definíció formulával: $I \neq \emptyset$ nyílt intervallum, $c \in I \subseteq D(f)$

f folytonos c -ben \iff

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) [|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon].$$

Példa

- $P(x)$ polinom \implies folytonos minden $c \in \mathbb{R}$ -ben.
- $|x|$ folytonos minden $c \in \mathbb{R}$ -ben.

Állítás

Ha f és g a c pontban folytonos függvények, és k tetszőleges valós szám, akkor a $k \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (feltéve, hogy $g(c) \neq 0$) függvények is folytonosak a c pontban.

Állítás

Ha g folytonos a c pontban, és f folytonos az $g(c)$ pontban, akkor $f \circ g$ folytonos a c pontban. (Jelölés: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.)

Bizonyítás

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

f folyt. $g(c)$ -ben $\implies \exists \delta_1 > 0$ [$|u - g(c)| < \delta_1 \implies |f(u) - f(g(c))| < \varepsilon$]

g folyt. c -ben $\implies \exists \delta_2 > 0$ [$|x - c| < \delta_2 \implies |g(x) - g(c)| < \delta_1$]

Ekkor δ_2 megfelelő δ -érték ε -hoz az $f \circ g$ függvény esetében, ugyanis:

$|x - c| < \delta_2 \implies |g(x) - g(c)| < \delta_1 \implies |f(g(x)) - f(g(c))| < \varepsilon$

Példa

$g(x) = \frac{x^3+1}{x^4-1}$ folytonos $c = 0$ -ban és $f(x) = |x|$ folytonos $g(0) = -1$ -ben
 $\implies f(g(x)) = \left| \frac{x^3+1}{x^4-1} \right|$ folytonos $c = 0$ -ban

Példa

$f(x) = |x|$ folytonos $c = 0$ -ban és $g(x) = \frac{x^3+1}{x^4-1}$ folytonos $f(0) = 0$ -ban
 $\implies g(f(x)) = \frac{|x|^{3+1}}{|x|^{4-1}}$ folytonos $c = 0$ -ban

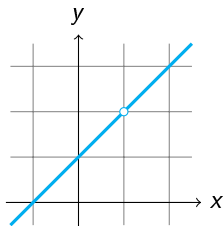
Definíció

c az f **szakadási pontja/helye**, ha f értelmezve van egy c -t tartalmazó nyílt intervallum pontjain, legfeljebb a c pontot kivéve, de f c -ben nem folytonos.

Definíció

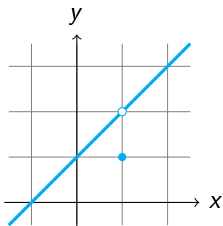
- c **megszüntethető** szakadási helye/pontja f -nek, ha az alábbiak közül valamelyik teljesül
 - $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ létezik (és véges), de $c \notin D(f)$ (c -t szokás **hézagpontnak hívni**)
 - $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ létezik (és véges), $c \in D(f)$, de $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$.
- c **ugráshelye** f -nek, ha $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ határértékek léteznek (és végesek), de különbözők.
- A többi szakadási helyet **lényeges** szakadási helynek nevezzük. Ezek közül
 - c **pólusa** f -nek, ha $\lim_{x \rightarrow c^+} f = \pm\infty$ és $\lim_{x \rightarrow c^-} f = \pm\infty$.

$$x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



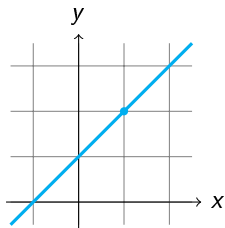
megszüntethető
szakadás

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{ha } x \neq 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$



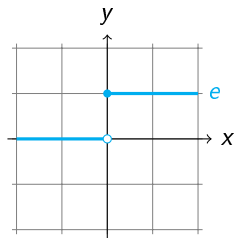
megszüntethető
szakadás

$$x \mapsto x + 1$$



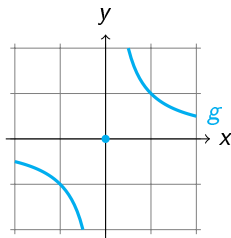
folytonos

$$e : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$



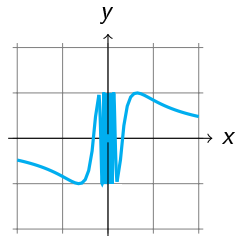
ugráshely

$$x \mapsto \begin{cases} 1/x & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$



pólus

$$x \mapsto \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

lényeges
szakadás

Példa

A Dirichlet-függvénynek:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

\mathbb{R} minden pontja szakadási pontja.

Példa

A Riemann-függvény:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \text{ egyszerűsített alak, } q > 0, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

folytonos minden irracionális pontban, és megszüntethető szakadása van a racionális pontokban.

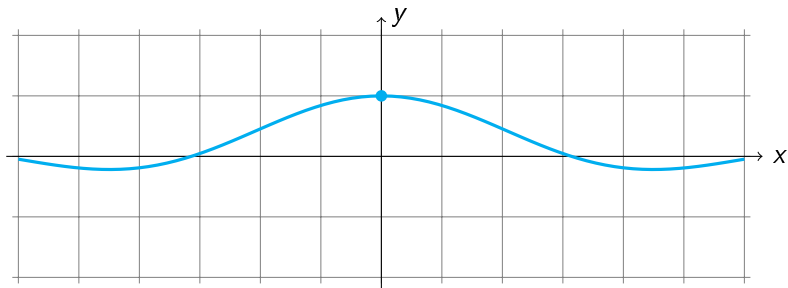
Tegyük fel, hogy az f függvénynek a c helyen megszüntethető szakadása van. Ekkor f folytonossá tehető a c pontban a következő függvény segítségével:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \neq c, \\ L & \text{ha } x = c \end{cases},$$

ahol $L = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$. Amennyiben f a c pontban nem volt értelmezve, az így definiált g függvényt szokás az f függvény c -re való **folytonos kiterjesztésének** nevezni.

Példa

A $\frac{\sin x}{x}$ függvény folytonosan kiterjeszthető a $c = 0$ pontra.



$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 1 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Definíció

Tegyük fel, hogy valamely $c < a$ értékre $[c, a) \subseteq D(f)$. Ekkor azt mondjuk, hogy f **jobbról folytonos** a c pontban, ha a $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ határérték létezik, és megegyezik az $f(c)$ helyettesítési értékkel.

Megjegyzés

A definíció formulával: $[c, a) \subseteq D(f)$ ($c < a$)

f jobbról folytonos c -ben \iff

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) [c \leq x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon].$$

Definíció

Tegyük fel, hogy valamely $a < c$ értékre $(a, c] \subseteq D(f)$. Ekkor azt mondjuk, hogy f **balról folytonos** a c pontban, ha a $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ határérték létezik, és megegyezik az $f(c)$ helyettesítési értékkel.

Megjegyzés

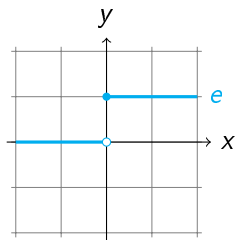
A definíció formulával: $(a, c] \subseteq D(f)$ ($a < c$)

f balról folytonos c -ben \iff

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) [c - \delta < x \leq c \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon].$$

Példa

$$e : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$



jobbról folytonos

Állítás

f pontosan akkor folytonos c -ben, ha jobbról és balról is folytonos c -ben.

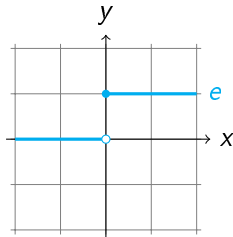
Definíció

Az f valós függvény folytonos az I intervallumon, ha az intervallum minden belső pontjában folytonos és

- ha I jobbról zárt, akkor abban a pontban balról folytonos,
- ha I balról zárt, akkor abban a pontban jobbról folytonos.

Példa

$$e : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$



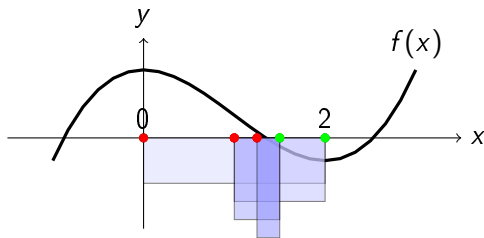
folytonos $[0, 1]$ -en és $[-1, 0)$ -n, de nem folytonos $[-1, 0]$ -n

Tétel (Bolzano-tétel)

Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon és $f(a)$ és $f(b)$ ellentétes előjelűek ($f(a) \cdot f(b) < 0$), akkor f -nek van zérushelye az intervallum belsejében, vagyis $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.

Bizonyítás

$[a, b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ zárt intervallumok:



I_{n+1} az I_n -nek az a fele, amelyiknek a két végpontján f különböző előjelű (ha f valamelyik osztópontban 0, akkor leállunk)

Bizonyítás (folytatás)

- **Cantor-axióma:** Egymásba skatulyázott nem üres zárt intervallumok metszete nem üres \mathbb{R} -ben.

Legyen $c \in J = I_0 \cap I_1 \cap I_2 \cap \dots$

I_n hossza $\frac{b-a}{2^n}$, ez akármilyen kis $\varepsilon > 0$ -nál kisebb, ha n elég nagy. \implies

$J = \{c\}$.

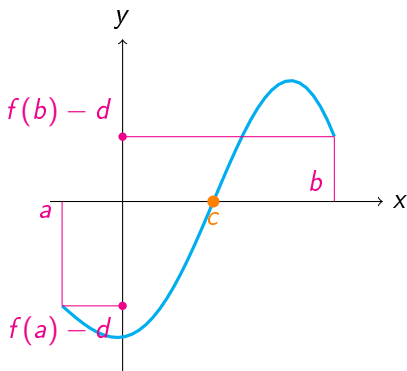
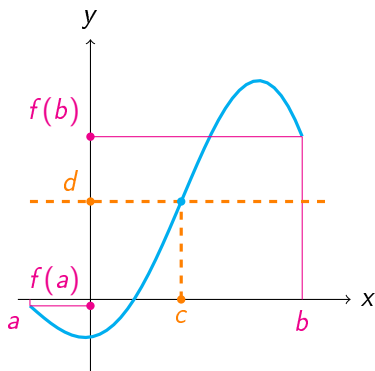
$f(c) = 0$, mert ha pl. $f(c) = K > 0$ lenne, akkor f folytonossága miatt valamely $\varepsilon > 0$ -ra $\forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap [a, b]$ -re $f(x) \geq \frac{K}{2} > 0$. De valamelyik I_n intervallum beleesik a c -nek ebbe a környezetébe, és annak a végpontjain f pozitív és negatív értéket is felvesz. \nexists

Tétel (Bolzano-Darboux-tétel)

Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső d -hez létezik olyan c , hogy $f(c) = d$.

Bizonyítás

Alkalmazzuk a Bolzano-tételt a $g(x) = f(x) - d$ függvényre.



Definíció (Szélsőértékek)

Legyen f egy valós függvény és $A \subseteq D(f)$.

- f -nek az A -ra nézve minimuma van a $c \in A$ pontban, ha minden $x \in A$ esetén $f(c) \leq f(x)$.
- f -nek az A -ra nézve maximuma van a $c \in A$ pontban, ha minden $x \in A$ esetén $f(c) \geq f(x)$.

Tétel (Weierstrass-tétel)

Ha f az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos függvény, akkor felveszi maximumát és minimumát, vagyis $\exists c_1, c_2 \in [a, b]$, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$.

Megjegyzés

$I \subseteq \mathbb{R}$ pontosan akkor intervallum, ha $a < c < b$, $a, b \in I$ -ből következik, hogy $c \in I$.

Következmény

Intervallum képe folytonos függvénynél intervallum, korlátos zárt intervallum képe pedig korlátos zárt intervallum.

Összefoglalás

- Pontbeli folytonosság
- Szakadási helyek, folytonos kiterjesztés
- Egyoldali folytonosság
- Intervallumon folytonos függvények (Bolzano-tétel, Bolzano-Darboux-tétel, szélsőértékek definíciója, Weierstrass-tétel)