BME KJK Matematika A1a Analízis, 1. ZH
2015. október 21.

Minden feladat 10 pontot ér, tehát összesen 60 pontot lehet szerezni. Részfeladatok esetén a pontszám egyenletesen oszlik el a részek közt. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Bizonyítsa be az alábbi logikai és halmazelméleti azonosságokat!
   a) $\neg(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \equiv Q \vee \neg P$ (igazságtáblával)
   b) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$ (igazságtáblával vagy halmazelméleti azonosságokkal)

2. Legyenek $\underline{\mathbf{a}} = (1, 2, 0)$, $\underline{\mathbf{b}} = (1, -1, 1)$, $\underline{\mathbf{c}} = (-3, 2, -1)$ egy paralelepipedon élvektorai. Határozzuk meg a paralelepipedon térfogatát, és a testátlójának az $\underline{\mathbf{a}}$ vektorral bezárt szögét!

3. Mennyi a távolsága a $P(1, 2, 3)$ pontnak attól a síktól, amely átmegy az $A(3, 0, 3)$ és $B(1, 2, 4)$ pontokon és párhuzamos az $e:\ x = 3,\ y = 1 + t,\ z = t$ egyenessel?

4. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a $z^6 - \dfrac{8 + 8i}{1 - i} z^3 - 16 = 0$ egyenletet!

5. Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2}{x^2 - 4}$ függvény limeszét ± 2-ben (ha csak egyoldali van, akkor azokat is), és adjuk meg a $+\infty$-beli ferde aszimptotájának egyenletét!

6. A következő rövid feladatok mindegyike 2 pontot ér:
   a) Igaz-e, hogy ha az $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}$ nemnulla térvektorokra $\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{c}}$, akkor $\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{c}}$?
   b) Írjuk fel a tér két tetszőleges, a koordinátasíkokkal nem párhuzamos, metsző egyenesének egyenletrendszerét!
   c) Írjunk fel egy olyan z komplex számot, amelyre $|z| = 2$ és $\mathrm{Re} z = 1$!
   d) Adjunk meg olyan $f(x), g(x)$ függvényeket és $c \in \mathbb{R}$ értéket, melyekre $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ és $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$!
   e) Létezik-e, és ha igen, akkor mivel egyenlő a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$ határérték?

BME KJK Matematika A1a Analízis, 1. ZH
2015. október 21.

Minden feladat 10 pontot ér, tehát összesen 60 pontot lehet szerezni. Részfeladatok esetén a pontszám egyenletesen oszlik el a részek közt. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Bizonyítsa be az alábbi logikai és halmazelméleti azonosságokat!
   a) $\neg(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \equiv Q \vee \neg P$ (igazságtáblával)
   b) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$ (igazságtáblával vagy halmazelméleti azonosságokkal)

2. Legyenek $\underline{\mathbf{a}} = (1, 2, 0)$, $\underline{\mathbf{b}} = (1, -1, 1)$, $\underline{\mathbf{c}} = (-3, 2, -1)$ egy paralelepipedon élvektorai. Határozzuk meg a paralelepipedon térfogatát, és a testátlójának az $\underline{\mathbf{a}}$ vektorral bezárt szögét!

3. Mennyi a távolsága a $P(1, 2, 3)$ pontnak attól a síktól, amely átmegy az $A(3, 0, 3)$ és $B(1, 2, 4)$ pontokon és párhuzamos az $e:\ x = 3,\ y = 1 + t,\ z = t$ egyenessel?

4. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a $z^6 - \dfrac{8 + 8i}{1 - i} z^3 - 16 = 0$ egyenletet!

5. Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2}{x^2 - 4}$ függvény limeszét ± 2-ben (ha csak egyoldali van, akkor azokat is), és adjuk meg a $+\infty$-beli ferde aszimptotájának egyenletét!

6. A következő rövid feladatok mindegyike 2 pontot ér:
   a) Igaz-e, hogy ha az $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}$ nemnulla térvektorokra $\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{c}}$, akkor $\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{c}}$?
   b) Írjuk fel a tér két tetszőleges, a koordinátasíkokkal nem párhuzamos, metsző egyenesének egyenletrendszerét!
   c) Írjunk fel egy olyan z komplex számot, amelyre $|z| = 2$ és $\mathrm{Re} z = 1$!
   d) Adjunk meg olyan $f(x), g(x)$ függvényeket és $c \in \mathbb{R}$ értéket, melyekre $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ és $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$!
   e) Létezik-e, és ha igen, akkor mivel egyenlő a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$ határérték?