BME KJK Matematika A1a Analízis, 1. ZH - Megoldás
2015. október 21.

1. Bizonyítsa be az alábbi logikai és halmazelméleti azonosságokat!
   a) $\neg(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \equiv Q \vee \neg P$ (igazságtáblával)
   b) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$ (igazságtáblával vagy halmazelméleti azonosságokkal)

Megoldás:

a)

$\neg$	(	P	$\wedge$	$\neg$	Q	)	$\vee$	(	P	$\wedge$	Q	)	$\equiv$	Q	$\vee$	$\neg$	P
1		0	0	1	0		1		0	0	0		✓	0	1	1	0
1		0	0	0	1		1		0	0	1		✓	1	1	1	0
0		1	1	1	0		0		1	0	0		✓	0	0	0	1
1		1	0	0	1		1		1	1	1		✓	1	1	0	1

b)

A	$\backslash$	(	A	$\backslash$	B	)	$=$	A	$\cap$	B
0	0		0	0	0		✓	0	0	0
0	0		0	0	1		✓	0	0	1
1	0		1	1	0		✓	1	0	0
1	1		1	0	1		✓	1	1	1

Megj.: előfeldolgozásként akár át is lehet írni a halmazelméleti műveleteket logikaira, és akkor a $A \wedge \neg(A \wedge \neg B) \equiv A \wedge B$ azonosságra jutunk, ezt kell belátni.

Halmazelméleti azonosságokkal: $A \setminus (A \setminus B) = A \cap \overline{A \cap \overline{B}} = A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) = A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$.

2. Legyenek $\underline{\mathbf{a}} = (1, 2, 0)$, $\underline{\mathbf{b}} = (1, -1, 1)$, $\underline{\mathbf{c}} = (-3, 2, -1)$ egy paralelepipedon (egy csúcsból kiinduló) élvektorai. Határozzuk meg a paralelepipedon térfogatát, és a(z ugyanebből a csúcsból induló) testátlójának az $\underline{\mathbf{a}}$ vektorral bezárt szögét!

Megoldás: A parelelepipedon térfogata:

$$V = |\underline{\mathbf{abc}}| = |(\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}) \cdot \underline{\mathbf{c}}| = |((1, 2, 0) \times (1, -1, 1)) \cdot (-3, 2, -1)| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-3, 2, -1) \right| =$$

$$|(2 \cdot 1 - (-1) \cdot 0, 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) \cdot (-3, 2, -1)| = |(2, -1, -3)(-3, 2, -1)| = |-6 - 2 + 3| = |-5| = 5.$$

A paralelepipedon testátlója $\underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{c}} = (-1, 3, 0)$. A keresett szög koszinusza:

$$\cos \sphericalangle(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{d}}) = \frac{\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{d}}}{|\underline{\mathbf{a}}| \cdot |\underline{\mathbf{d}}|} = \frac{(1, 2, 0) \cdot (-1, 3, 0)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{-1 + 6 + 0}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \sphericalangle(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{d}}) = \frac{\pi}{4}\ (45°).$$

3. Mennyi a távolsága a $P(1, 2, 3)$ pontnak attól a síktól, amely átmegy az $A(3, 0, 3)$ és $B(1, 2, 4)$ pontokon és párhuzamos az $e: \ x = 3, \ y = 1 + t, \ z = t$ egyenessel?

Megoldás: Jelölje $\mathcal{S}$ a szóban forgó síkot. Ekkor $\mathcal{S}$ normálvektorát megkaphatjuk úgy, mint e irányvektorának és az $\overrightarrow{AB}$ vektornak a vektoriális szorzata. Az előbbi leolvasható az egyenes paraméteres egyenletrendszeréből, $\underline{v}_e = (0, 1, 1)$, az utóbbi pedig $\overrightarrow{AB} = (1 - 3, 2 - 0, 4 - 3) = (-2, 2, 1)$, így

$$\underline{n}_{\mathcal{S}} = (0, 1, 1) \times (-2, 2, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2, 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 0, 0 \cdot 2 - (-2) \cdot 1) = (-1, -2, 2).$$

$\mathcal{S}$ egy pontja pl. A, így az egyenlete:

$$-1(x - 3) - 2(y - 0) + 2(z - 3) = 0 \implies -x - 2y + 2z - 3 = 0.$$

A normálegyenlethez le kell osztani $\underline{n}_{\mathcal{S}}$ hosszával, vagyis $\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$-mal:

$$-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0,$$

így a távolság

$$d = \left| -\frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 3 - 1 \right| = \frac{2}{3}.$$

4. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a $z^6 - \dfrac{8+8i}{1-i} z^3 - 16 = 0$ egyenletet!

Megoldás: $\dfrac{8+8i}{1-i} = \dfrac{(8+8i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{16i}{2} = 8i$, így az egyenlet

$$z^6 - 8iz^3 - 16 = 0.$$

$y = z^3$ helyettesítás után y-ban másodfokú egynlethez jutunk, aminek megoldása:

$$y = \frac{8i \pm \sqrt{-64+64}}{2} = 4i = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\Longrightarrow z = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0,1,2$$

5. Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{2x^3+4x^2}{x^2-4}$ függvény limeszét ± 2-ben (ha csak egyoldali van, akkor azokat is), és adjuk meg a $+\infty$-beli ferde aszimptotájának egyenletét!

Megoldás: $f(x) = \dfrac{2x^3+4x^2}{x^2-4} = \dfrac{2x^2(x+2)}{(x-2)(x+2)}$, így

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2}{x-2} = \dfrac{8}{-4} = -2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x^2}{x-2} \overset{\frac{8}{0^+}}{=} +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x^2}{x-2} \overset{\frac{8}{0^-}}{=} -\infty$

A $+\infty$-beli ferde aszimptotához:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+4x^2}{x^3-4x} \overset{\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = 2 = a$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+4x^2}{x^2-4} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+4x^2-2x^3+8x}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+8x}{x^2-4} \overset{\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{8}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = 4$$

Tehát a $+\infty$-beli ferde aszimptota egyenlete: $y = 2x + 4$.

6. A következő rövid feladatok mindegyike 2 pontot ér:
   a) Igaz-e, hogy ha az $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}$ nemnulla térvektorokra $\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{c}}$, akkor $\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{c}}$?
   b) Írjuk fel a tér két tetszőleges, a koordinátasíkokkal nem párhuzamos, metsző egyenesének egyenletrendszerét!
   c) Írjunk fel egy olyan z komplex számot, amelyre $|z| = 2$ és $\mathrm{Re} z = 1$!
   d) Adjunk meg olyan $f(x), g(x)$ függvényeket és $c \in \mathbb{R}$ értéket, melyekre $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ és $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$!
   e) Létezik-e, és ha igen, akkor mivel egyenlő a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ határérték?

Megoldás:

a) Nem, pl. $\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{i} \cdot 2\underline{j} = 0$, de $\underline{j} \neq 2\underline{j}$.

b) Pl. $e: \ x = 1+2t, \ y = 1-t, \ z = 1-t$ és $f: \ x = 1+2t, \ y = 1+3t, \ z = 1+t$. Mindkét egyenes átmegy a $P(1,1,1)$ ponton és nem párhuzamosak, hisz irányvektoraik nem párhuzamosak.

c) $z = 1 + \sqrt{3}i$ vagy $z = 1 - \sqrt{3}i$.

d) Pl. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0$ és $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

e) $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} \to 0$, ha $x \to \infty \Longrightarrow$ A rendőrelv miatt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.