BME KJK Matematika A1a Analízis, 2. ZH - Megoldás
2015. november 18.

1. Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy az $f(x)$ függvény mindenütt folytonos legyen!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} & x < 0 \\ ax + b & 0 \le x \le 1 \\ \frac{\ln x}{x-1} & 1 < x \end{cases}$$

Megoldás: $x \neq 0, 1$-re f folytonos, mert a megfelelő részeken az ott megadott függvénye folytonos függvényekből van összerakva folytonosságot megőrző módon.

Hogy 0-ban folytonos legyen, az kell, hogy:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = b.$$

Itt:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} ax + b = b$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \lim_{y\to -\infty} \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y = \frac{1}{\pi}(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow b = -\frac{1}{2}$

Hogy 1-ben folytonos legyen, az kell, hogy:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = a + b.$$

Itt:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \overset{L'H(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax + b = a + b$$

$\Longrightarrow a + b = 1 \Longrightarrow a - \dfrac{1}{2} = 1 \Longrightarrow a = \dfrac{3}{2}$

2. Osszuk el az $f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 + 7x - 2$ polinomot maradékosan $(x-1)$-gyel, és keressük meg f összes gyökét!

Megoldás: Az osztást elvégezhetjük a Horner-módszerrel:

	2	−1	−6	7	−2
$c = 1$	2	1	−5	2	0

Vagyis f osztható $(x-1)$-el, azaz $x = 1$ gyök és $f(x) = (x-1)(2x^3 + x^2 - 5x + 2)$. f további gyökeinek meghatározásához a hányados gyökei kellenek még. Ehhez használjuk a racionális gyöktesztet a hányadosra. Eszerint, ha $r = \dfrac{p}{q}$ egy racionális gyök egyszerűsített alakban, akkor $p \mid 2$ és $q \mid 2 \Longrightarrow r \in \{\pm 1, \pm 2, \pm\dfrac{1}{2}\}$. Ha minden értéket behelyettesítünk, azt kapjuk, hogy $x = 1, -2, \frac{1}{2}$ gyöke a polinomnak. Mivel harmadfokú, ennél több nem is lehet, vagyis az eredeti polinom gyökei: $x_1 = 1$ (kétszeres), $x_2 = -2$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$. (Ha csak egy c gyököt találunk, akkor $(x-c)$-t ismét ki lehet emelni, és a hányadosként adódó másodfokú polinom gyökeit meg lehet keresni.)

3. Számítsuk ki a megadott függvények deriváltját! a) $\dfrac{\sin 2x}{x^3 + 2}$ b) $e^{\sin x^3}$

Megoldás:

a) $$\left(\frac{\sin 2x}{x^3+2}\right)' = \frac{(\sin 2x)' \cdot (x^3+2) - \sin 2x \cdot (x^3+2)'}{(x^3+2)^2} = \frac{\cos 2x \cdot 2 \cdot (x^3+2) - \sin 2x \cdot 3x^2}{(x^3+2)^2}$$

b) $$\left(e^{\sin x^3}\right)' = e^{\sin x^3} \cdot (\sin x^3)' = e^{\sin x^3} \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2$$

4. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x\sqrt{x} + 2x + 1$ függvény abszolút szélsőértékeit a $[0, 9]$ intervallumon!

Megoldás: Abszolút szélsőérték vagy az intervallum szélein, vagy kritikus pontokban lehet. Az utóbbihoz:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + 2x + 1\right)' = x - 3x^{\frac{1}{2}} + 2 = x - 3\sqrt{x} + 2.$$

$f'(x) = (\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + 2 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) = 0 \Longrightarrow \sqrt{x}$ értéke 1 vagy 2 $\Longrightarrow x$ értéke 1 vagy 4. (A $\sqrt{x}$-ben másodfokú egyenletet megoldóképlettel is meg lehet természetesen oldani.)
Két kritikus pontunk van tehát (olyan kritikus pont most nincs, ahol a derivált nem létezne), itt a függvényértékek $f(1) = \frac{3}{2}$ és $f(4) = 1$. Az intervallum szélein a függvényértékek $f(0) = 1$ és $f(9) = \frac{11}{2}$. Ez alapján a függvény abszolút minimuma az intervallumon 1, ezt 0-ban és 4-ben veszi fel, az abszolút maximuma pedig $\frac{11}{2}$, ezt 9-ben veszi fel.

5. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = xe^x$ függvényen!

Megoldás:

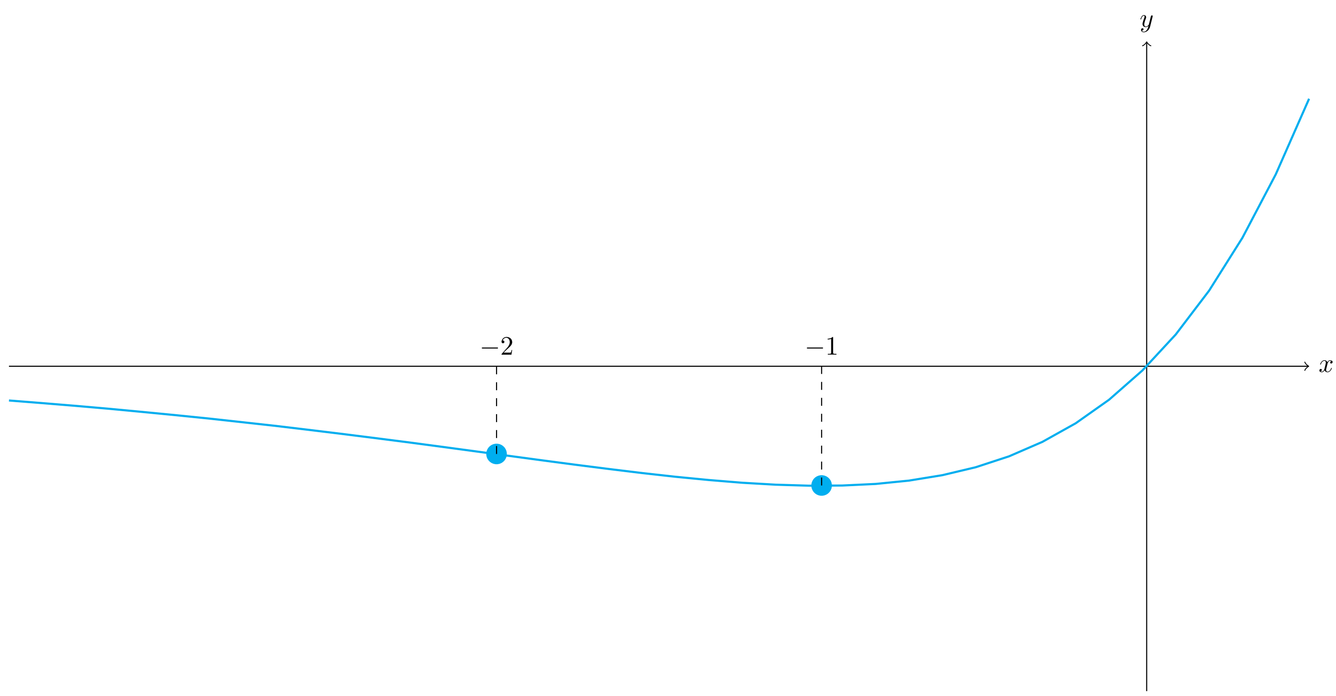
1. $D(f) = \mathbb{R}$ és itt folytonos is, mert folytonos függvényekből van összerakva folytonosságot megőrző módon. (Nem páros, nem páratlan, nem periodikus)
2. $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$, $f''(x) = e^x + e^x(x+1) = e^x(x+2)$
3. Kritikus pontok: $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -1$
4. Monotonitás és lokális szélsőértékek:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	csökken	lok. min.	nő

5. Konvexitás és inflexiós pontok: $f''(x) = 0 \Longrightarrow x = -2$

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	konkáv	infl. pont	konvex

6. Aszimptoták: Mivel f mindenhol folytonos, így nincs függőleges aszimptota. $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$, vagyis $+\infty$-ben nincs vízszintes aszimptota, és $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, tehát ferde aszimptota sincs $+\infty$-ben. $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{L'H(\frac{-\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$, vagyis $y = 0$ vízszintes aszimptota $-\infty$-ben.
7. Függvényértékek zérushelyek: $f(-1) = -\frac{1}{e}$, $f(-2) = -\frac{1}{e^2}$, $f(0) = 0$.
8. Ábra:



9. $R(f) = [-\frac{1}{e}, \infty)$

6. A következő feladatok mindegyike 2 pontot ér:
   a) Igaz-e, hogy ha f-nek szakadása van egy c pontban, akkor ott nem létezik határértéke?
   b) Mi az $\arccos x$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete?
   c) Tegyük fel, hogy f folytonos és differenciálható $\mathbb{R}$-en, és $f(1) = 1$, $f(3) = 5$. Adjunk meg egy olyan függvényértéket, amit f' biztosan felvesz az $(1, 3)$ intervallumon!
   d) Az A: "f monoton", B: "f invertálható" állítások közül következik-e valamelyikből a másik? Ha nem, adjunk ellenpéldát!
   e) Adjunk meg egy olyan f függvényt, melyre $f(1) = f'(1) = 0$, de nincs lokális minimuma $x = 1$-ben!

Megoldás:

a) Nem, pl. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$-nek megszüntethető szakadása van $x = 1$-ben, de létezik ott határértéke: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x + 1 = 2$.

b) $D(\arccos x) = [-1, 1]$, $R(\arccos x) = [0, \pi]$

c) A Lagrange-féle középértéktétel szerint $\exists c \in (1, 3)$, hogy $f'(c) = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{5-1}{2} = 2$.

d) $A \not\Rightarrow B$, pl. $f(x) = 1$ monoton, de nem invertálható. $B \not\Rightarrow A$, pl. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ invertálható $\mathbb{R}\setminus\{0\}$-n, de itt nem monoton.

e) Pl. $f(x) = (x-1)^3$, ugyanis ekkor $f'(x) = 3(x-1)^2$, így $f(1) = f'(1) = 0$, de f végig szigorúan monoton növő, így sehol sincs lokális minimuma. (Olyan függvény is jó, aminek lokális maximuma van (és nem minimuma), és $f(1) = 0$, ilyen pl. $f(x) = -(x-1)^2$.)