1. feladatsor - Megoldások
Matematika A1a

1. Írjuk fel a következő állításokat az $f(x)$: "x fél", illetve $v(x)$: "x velem jön" állítások segítségével! Van-e köztük két olyan, ami ugyanazt jelenti? És olyan, amely a tagadása egy másiknak?
   a) Aki nem fél, az velem jön.
   b) Nem fél, aki velem jön.
   c) Olyan is jön velem, aki fél.
   d) Aki velem jön, az fél.
   e) Mindenki fél, aki nem jön velem.
   f) Velem jön, aki fél.

   Megoldás:

   a) $\forall x(\neg f(x) \Rightarrow v(x))$

   b) $\forall x(v(x) \Rightarrow \neg f(x))$

   c) $\exists x(v(x) \wedge f(x))$

   d) $\forall x(v(x) \Rightarrow f(x))$

   e) $\forall x(\neg v(x) \Rightarrow f(x))$

   f) $\forall x(f(x) \Rightarrow v(x))$

2. Az alábbi feladatban P : igaz, Q : hamis, R : hamis és S : igaz logikai értékű állítást jelöl. Határozzuk meg a következő állítások logikai értékét!
   a) $P \Rightarrow (P \Rightarrow S)$
   b) $P \Rightarrow (R \vee S)$
   c) $(R \vee \neg S) \Leftrightarrow (Q \vee S)$

   Megoldás:

a)

P	$\Rightarrow$	$($	P	$\Rightarrow$	S	$)$
1	1		0	1	1	

$\Longrightarrow$ igaz

b)

P	$\Rightarrow$	$($	R	$\vee$	S	$)$
1	1		0	1	1	

$\Longrightarrow$ igaz

c)

$($	R	$\vee$	$\neg$	S	$)$	$\Leftrightarrow$	$($	Q	$\vee$	S	$)$
	0	0	0	1		0		0	1	1	

$\Longrightarrow$ hamis

3. Bizonyítsuk be az alábbi logikai azonosságokat igazságtáblával!
   a) $(A \wedge B) \Rightarrow A \equiv A \Rightarrow (A \vee B)$
   b) $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$ (kizáró vagy)

   Megoldás:

a)

$(A$	$\wedge$	$B)$	$\Rightarrow$	A	$\equiv$	A	$\Rightarrow$	$(A$	$\vee$	$B)$
0	0	0	1	0	✓	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	✓	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	✓	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	✓	1	1	1	1	1

b)

$(A$	vee	$B)$	$\wedge$	$\neg$	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\equiv$	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$B)$	$\vee$	$(B$	$\wedge$	$\neg$	$A)$
0	0	0	0	1	0	0	0	✓	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1	✓	0	0	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0	✓	1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	✓	1	0	0	1	0	1	0	0	1

4. Mit mondhatunk $\mathbb{R}$-nek arról a H részhalmazáról, amelyre a következő állítás teljesül?
   a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in H\ (x < y)$
   b) $\forall x \in H\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x < y)$
   c) $\forall x \in H\ \exists y \in H\ (x < y)$

   Megoldás:

   a) H felülről nem korlátos.

   b) Ezt minden halmaz teljesíti.

   c) H-nak nincs maximális eleme.

5. Legyen A a páros, B a 4-nél kisebb, C pedig a 2-nél nagyobb természetes számok halmaza. Mely számok alkotják az $[A \backslash (B \cap C)] \cup [(A \backslash B) \backslash C]$ halmazt?

   Megoldás: $B \cap C = \{3\} \Longrightarrow A \backslash (B \cap C) = A$
   $A \backslash B = \{4, 6, 8, \dots\} \Longrightarrow (A \backslash B) \backslash C = \emptyset$
   $\Longrightarrow [A \backslash (B \cap C)] \cup [(A \backslash B) \backslash C] = A$

6. Legyenek A, B és C az U alaphalmaz részhalmazai. Írjuk fel a következő halmazokat:
   a) csak B elemei
   b) pontosan két halmaz elemei
   c) egyik halmaznak sem elemei
   d) legfeljebb egy halmaz elemei
   e) legalább egy halmaz elemei
   f) legalább két halmaz elemei

Megoldás:

a) $B \backslash (A \cup C)$

b) $[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] \backslash (A \cap B \cap C)$

c) $\overline{A \cup B \cup C} = U \backslash (A \cup B \cup C)$

d) $(A \cup B \cup) \backslash [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)]$

e) $A \cup B \cup C$

f) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

7. Döntsük el, melyek igazak minden A és B halmazra az alábbi halmazalgebrai állítások közül!
   a) $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$
   b) $A \cap B \subseteq A$
   c) $A \cap B \subseteq A \backslash B$
   d) $A \backslash B \subseteq A \cup B$
   e) $\overline{A \cup B} \not\subseteq \overline{A}$
   f) $A \backslash B \not\subseteq B$

Megoldás:

a) Igaz, mert $x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A$ és $x \in B$, az utóbbiak közül pedig bármelyikből következik, hogy $x \in A \cup B$.

b) Igaz, mert $x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A$ és $x \in B$.

c) Nem igaz, pl. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$ esetén $A \cap B = \{1\}$, $A \backslash B = \{2\}$ de $\{1\} \not\subseteq \{2\}$.

d) Igaz, mert $A \backslash B \subseteq A \subseteq A \cup B$

e) Nem igaz, pl. ha $B = \emptyset$, akkor $\overline{A \cup B} = \overline{A}$.

f) Nem igaz, pl. ha $A = B$, akkor $A \backslash B = \emptyset \subseteq B$.

8. Ellenőrizzük igazságtáblával, hogy igazak-e az alábbi állítások minden A, B, C halmazra!
   a) $B \cup [A \backslash (A \backslash \overline{B})] = A \cup B$
   b) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash C$

Megoldás:

a)

B	$\cap$	[	A	$\backslash$	(	A	$\backslash$	$\overline{B}$	)	]	=	A	$\cup$	B
0	0		0	0		0	0	1	)	]	✓	0	0	0
1	1		0	0		0	0	0	)	]	✓	0	1	1
0	1		1	1		1	0	1	)	]	✓	1	1	0
1	1		1	0		1	1	0	)	]	✓	1	1	1

b)

A	$\cup$	(	B	$\backslash$	C	)	=	(	A	$\cup$	B	)	$\backslash$	C
0	0		0	0	0		✓		0	0	0		0	0
0	0		0	0	1		✓		0	0	0		0	1
0	1		1	1	0		✓		0	1	1		1	0
0	0		1	0	1		✓		0	1	1		0	1
1	1		0	0	0		✓		1	1	0		1	0
1	1		0	0	1		–		1	1	0		0	1
1	1		1	1	0		✓		1	1	1		1	0
1	1		1	0	1		–		1	1	1		0	1

$\Longrightarrow$ Nem igaz.

9. Bizonyítsuk be, hogy a következő halmazpárok azonos számosságúak!
   a) $[a, b]$ és $[c, d]$ intervallum
   b) $(0, 1)$ intervallum és $\mathbb{R}$
   c) $[0, 1]$ és $(0, 1]$ intervallum

Megoldás:

a) Az $f(x) = c + \dfrac{x - a}{b - a}(d - c)$ függvény bijekciót ad köztük.

b) Az $f(x) = \text{ctg}(\frac{x}{\pi})$ függvény bijekciót ad köztük.

c) Tekinsük azt a függvény, amelyre $f(\frac{k}{k+1}) = \frac{k+1}{k+2}$ ha $k = 0, 1, 2, \ldots$, egyébként $f(x) = x$. Ez a függvény bijekciót teremt a megadott halmazok közt.

10. $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) =?$ Mennyi eleme van $\mathcal{P}(\{a_1, \ldots, a_n\})$-nek?

Megoldás: $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$. Általánosan $\mathcal{P}(\{a_1, \ldots, a_n\})$-nek 2^n eleme van. Ezt akkor könnyű látni, ha megpróbáljuk felsoroloni az összes részhalmazt. Ezt úgy is megtehetjük, ha minden elemnél döntünk, hogy az adott elemet bevesszük-e az aktuális részhalmazba vagy sem. Minden elemnél 2 lehetőségünk van, ez összesen 2^n különböző döntési sorozat, és ezek pont megfeleltethetőek a részhalmazoknak.