

3. feladatsor - -Megoldások
Matematika A1

1. (Gy) Írjuk fel azon egyenes paraméteres és paramétermentes egyenletét, amely
- átmegy az $A(-2, 5, 1)$ ponton és párhuzamos az $\underline{a} = (-1, 2, 3)$ vektorral!
 - párhuzamos a $\underline{j} = (0, 1, 0)$ vektorral, és átmegy az $A(5, 1, 4)$ ponton!
 - átmegy a $P(3, 1, 2)$ és $Q(-1, 1, 3)$ pontokon!
 - átmegy a $(0, 7, 0)$ ponton és merőleges $x + 2y + 2z = 13$ egyenletű síkra!

Megoldások:

- a) Az egyenes egy pontja $A(-2, 5, 1)$, irányvektora $\underline{a} = (-1, 2, 3)$, így egyenlete

$$\text{paraméteres: } \begin{cases} x = -2 - t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \iff \text{paramétermentes: } \frac{x+2}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{3}$$

- b) Az egyenes egy pontja $A(5, 1, 4)$, irányvektora $\underline{j} = (0, 1, 0)$, így egyenletei:

$$\text{paraméteres: } \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 + t \\ z = 4 \end{cases} \iff \text{paramétermentes: } x = 5, z = 4$$

- c) Az egyenes egy pontja $P(3, 1, 2)$, irányvektora $\overrightarrow{PQ} = (-4, 0, 1)$, így egyenlete

$$\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases} \iff \frac{x-3}{-4} = \frac{z-2}{1}, y = 1$$

- d) Az egyenes egy pontja $(0, 7, 0)$, irányvektora pedig épp a sík $\underline{n} = (1, 2, 2)$ normálvektora, így egyenlete

$$\begin{cases} x = t \\ y = 7 + 2t \\ z = 2t \end{cases} \iff \frac{x}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z}{2}$$

2. (Gy) Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely
- átmegy az $A(1, 5, 2)$ ponton és párhuzamos a $7x - y + 3z = 0$ egyenletű síkkal!
 - átmegy az $A(2, 1, -3)$ és $B(-1, 0, 1)$ pontokon és párhuzamos a $\underline{v} = (3, -2, 0)$ vektorral!

Megoldások:

- a) A sík egy pontja $A(1, 5, 2)$ és normálvektora megegyezik a megadott sík $\underline{n} = (7, -1, 3)$ normálvektorával, így egyenlete

$$7(x-1) - 1(y-5) + 3(z-2) = 0 \implies 7x - y + 3z = 8$$

- b) A sík egy pontja $A(2, 1, -2)$ és normálvektora $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \underline{v} = (-3, -1, 4) \times (3, -2, 0) = (8, 12, 9)$, így egyenlete

$$8(x-2) + 12(y-1) + 9(z+2) = 0 \implies 8x + 12y + 9z = -10$$

3. (Gy) Vizsgáljuk meg, hogy a megadott három pont egy egyenesbe esik-e; ha nem, írjuk fel a megadott pontokon áthaladó sík egyenletét!
- $(-3, 0, 4), (4, 1, 2), (0, 0, 0)$
 - $(-2, 3, 1), (0, 5, 2), (-4, 1, 0)$
 - $(1, 1, -1), (2, 0, 2), (0, -2, 1)$

Megoldások: Az A, B, C pontok pontosan akkor nem esnek egy egyenesbe, ha az \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{AC} vektorok nem párhuzamosk (nem egymás számszorosai). Ha ez teljesül, akkor az általuk meghatározott sík normálvektora $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

- a) $A(0, 0, 0), B(-3, 0, 4), C(4, 1, 2) \implies \overrightarrow{AB} = (-3, 0, 4)$ és $\overrightarrow{AC} = (4, 1, 2)$. Ez a két vektor nem egymás számszorosa, így nem párhuzamosak. Az általuk meghatározott sík egy pontja pl. $A(0, 0, 0)$, normálvektora $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 4) \times (4, 1, 2) = (-4, 22, -3)$, így egyenlete

$$-4(x-0) + 22(y-0) - 3(z-0) = 0 \implies -4x + 22y - 3z = 0$$

- b) $A(-2, 3, 1), B(0, 5, 2), C(-4, 1, 0) \implies \overrightarrow{AB} = (2, 2, 1)$ és $\overrightarrow{AC} = (-2, -2, -1)$. Ez a két vektor egymás -1 -szerese, vagyis párhuzamosak, így egy egyenesbe esnek.
- c) $A(1, 1, -1), B(2, 0, 2), C(0, -2, 1) \implies \overrightarrow{AB} = (1, -1, 3)$ és $\overrightarrow{AC} = (-1, -3, 2)$. Ez a két vektor nem egymás számszorosa, így nem párhuzamosak. Az általuk meghatározott sík egy pontja pl. $A(1, 1, -1)$, normálvektora $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -1, 3) \times (-1, -3, 2) = (7, -5, -4)$, így egyenlete

$$7(x-1) - 5(y-1) - 4(z+1) = 0 \implies 7x - 5y - 4z = 6$$

4. (Gy) Állapítsuk meg az alábbi egyenesek kölcsönös helyzetét (azonos; párhuzamos, de nem azonos; metsző; kitérő)! Ha metszőek, adjuk meg a metszéspontjukat.

$$e: \begin{cases} x = 3 + 4t, & y = 2t, & z = -1 - 2t; \\ f: & x - 2 = z + 1, & y = 2; \\ g: & \frac{x+1}{2} = y + 2 = 1 - z; \\ h: & x = 2 + t, & y = -1, & z = 1 + t. \end{cases}$$

Megoldások: Az paraméteres egyenletrendszerek és irányvektorok:

- $e: x = 3 + 4t, y = 2t, z = -1 - 2t \implies \underline{v}_e = (4, 2, -2)$
- $f: x - 2 = z + 1, y = 2 \implies \frac{x-2}{1} = \frac{z+1}{1}, y = 2 (\implies x = 2+t, y = 2, z = -1+t) \implies \underline{v}_f = (1, 0, 1)$
- $g: \frac{x+1}{2} = y + 2 = 1 - z \implies \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1} (\implies x = -1 + 2t, y = -2 + t, z = 1 - t) \implies \underline{v}_g = (2, 1, -1)$
- $h: x = 2 + t, y = -1, z = 1 + t \implies \underline{v}_h = (1, 0, 1)$

Vizsgáljuk páronként az egyeneseket:

- e és f - Nem párhuzamosak, mert irányvektoraik nem azok. Metszéspont keresése (új paraméter f -ben, és az egyes részeket egyenlővé tesszük):

$$\begin{cases} 3 + 4t = 2 + s \\ 2t = 2 \\ -1 - 2t = -1 + s \end{cases} \implies \text{nincs megoldás} \implies \text{kitérő egyenesek}$$

- e és g - $\underline{v}_e = 2\underline{v}_g \implies$ párhuzamosak és azonosak, mert a $(3, 0, -1)$ pont mindkettőn rajta van (e -nél $t = 0$ -hoz, g -nél $t = 2$ -höz tartozik).
- e és h - Nem párhuzamosak, mert irányvektoraik nem azok. Metszéspont keresése (új paraméter h -ban, és az egyes részeket egyenlővé tesszük):

$$\begin{cases} 3 + 4t = 2 + s \\ 2t = -1 \\ -1 - 2t = 1 + s \end{cases} \implies t = -\frac{1}{2}, s = -1 \implies (1, -1, 0) \text{ a metszéspont, tehát metszőek}$$

- f és g - Ugyanaz, mint f és e (hisz e és g azonosak).
- f és h - $\underline{v}_f = \underline{v}_h \implies$ párhuzamosak, de nem azonosak, mert a $(2, 2, -1)$ pont rajta van f -en ($t = 0$ -hoz tartozik), de nincs rajta h -n (nincs megfelelő paraméter).
- g és h - Ugyanaz, mint e és h (hisz e és g azonosak).

5. (*) Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét (paraméteres vagy paramétermentes), amely átmege a $P(-1, 2, -3)$ ponton, merőleges az $\underline{a} = (6, -2, -3)$ vektorra, és metszi az $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{3-z}{5}$ egyenletrendszerű egyenest!

Megoldások: A megadott egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x = 1 + 3t, y = -1 + 2t, z = 3 - 5t$. A t paraméterű általános pontot jelölje Q_t . Q_t pontosan akkor lehet a felírandó egyenessel vett metszéspont, ha a $\overrightarrow{PQ_t}$ és \underline{a} vektorok merőlegesek $\iff \overrightarrow{PQ_t} \cdot \underline{a} = 0 \iff$

$$\begin{aligned} (1 + 3t - (-1), -1 + 2t - 2, 3 - 5t - (-3)) \cdot (6, -2, -3) &= 0 \iff (2 + 3t, -3 + 2t, 6 - 5t) \cdot (6, -2, -3) = 0 \\ \iff 6(2 + 3t) - 2(-3 + 2t) - 3(6 - 5t) &= 0 \iff 12 + 18t + 6 - 4t - 18 + 15t = 0 \\ \iff t = 0 \implies Q(1, -1, 3) \end{aligned}$$

A felírandó egyenes egy pontja pl. $P(-1, 2, -3)$ és irányvektora $\underline{v} = \overrightarrow{PQ} = (2, -3, 6)$, így paraméteres egyenletrendszere $x = -1 + 2t, y = 2 - 3t, z = -3 + 6t$.

6. (*) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét (paraméteres vagy paramétermentes), ha van ilyen, amely merőleges a $2x + 4y - z + 5 = 0$ egyenletű síkra és metszi a következő egyenletrendszerű egyeneseket:

$$e: \frac{x}{2} = -y = z, \quad f: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{3}.$$

Megoldások: A felírandó egyenes merőleges kell hogy legyen a megadott síkra, így irányvektora megegyezik annak normálvektorával, vagyis $\underline{v} = \underline{n} = (2, 4, -1)$. Az e egyenes paraméteres egyenletrendszere $x = 2t, y = -t, z = t$, általános pontját jelölje P_t . Az f egyenes paraméteres egyenletrendszere $x = 2 + 3s, y = 1 + 5s, z = 3s$, általános pontját jelölje Q_s . P_t és Q_s akkor lehetnek a felírandó egyenessel vett metszéspontok, ha a $\overrightarrow{P_t Q_s} = (2 + 3s - 2t, 1 + 5s + t, 3s - t)$ vektor párhuzamos a $\underline{v} = (2, 4, -1)$ vektorral $\iff \overrightarrow{P_t Q_s}$ és \underline{v} egymás számszorosai $\iff \exists c \neq 0$, hogy $2 + 3s - 2t = 2c, 1 + 5s + t = 4c, 3s - t = -c$. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása $s = \frac{2}{41}, t = \frac{25}{41}$ és $c = \frac{19}{41}$. \implies A keresett egy pontja pl. $Q_{\frac{2}{41}} = (\frac{88}{41}, \frac{51}{41}, \frac{6}{41})$ és irányvektora $\underline{v} = (2, 4, -1)$, így paraméteres egyenletrendszere $x = \frac{88}{41} + 2t, y = \frac{51}{41} + 4t, z = \frac{6}{41} - t$.

7. (Gy) Határozzuk meg a megadott sík és egyenes közös pontját, ha van ilyen!
 a) $e: x = 3 - t, y = 2 - t, z = 3 - t, \mathcal{S}: -2x + y + 3z - 3 = 0$
 b) $e: x + 2 = y - 3 = \frac{z+1}{3}, \mathcal{S}: x + 2y - z + 2 = 0$

Megoldások:

- a) "Helyettesítsük e -t \mathcal{S} -be:" $-2(3-t) + (2-t) + 3(3-t) = 0 \implies -2t + 5 = 0 \implies t = \frac{5}{2} \implies$ A metszéspont koordinátái: $x = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}, y = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}, z = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \implies (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
 b) e paraméteres egyenletrendszere: $x = -2 + t, y = 3 + t, z = -1 + 3t$. "Helyettesítsük e -t \mathcal{S} -be:" $(-2+t) + 2(3+t) - (-1+3t) + 2 = 0 \implies 7 = 0 \implies$ Nincs megoldás, tehát nincs metszéspont.

8. (Gy) Mely pontban dőli a $P(1, 1, 0)$ és a $Q(3, 1, 2)$ pontokat összekötő egyenes a $S(2, 1, 3)$ ponton átmenő $\underline{n}(1, 1, 1)$ normálvektorú síkot?

Megoldások: A P és Q pontokon átmenő egyenes irányvektora $\overrightarrow{PQ} = (2, 0, 2)$, így paraméteres egyenletrendszere (pontnak a P pontot használva) $e: x = 1 + 2t, y = 1, z = 2t$. A sík egyenlete $\mathcal{S}: 1(x-2) + 1(y-2) + 1(z-3) = 0 \implies x + y + z = 7$. "Helyettesítsük e -t \mathcal{S} -be:" $(1+2t) + 1 + 2t = 7 \implies 4t = 5 \implies t = \frac{5}{4} \implies$ A metszéspont koordinátái: $x = 1 + 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{7}{2}, y = 1, z = 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \implies (\frac{7}{2}, 1, \frac{5}{2})$.

9. (Gy) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegegy a $P(2, 1, -1)$ ponton és merőleges a $2x + y - z = 3, x + 2y + z = 2$ síkok metszészínelára!

Megoldások: Ha a sík merőleges a két megadott sík metszészínelára, akkor normálvektora épp a két sík normálvektorának vektoriális szorzata:

$$\underline{n} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = (2, 1, -1) \times (1, 2, 1) = (3, -3, 3) \implies (1, -1, 1).$$

Így a sík egyenlete: $1(x-2) - 1(y-1) + 1(z+1) = 0 \implies x - y + z = 0$.

10. (Gy) Határozzuk meg az alábbi alakzatok távolságát:
 a) $(0, 0, 12)$ pont és az $x = 4t, y = -t, z = 2t$ egyenes
 b) $(0, -1, 0)$ pont és a $2x + y + 2z = 4$ sík
 c) $x = 2 + t, y = 3t + 2, z = 4t + 3$ és $x = 1 - s, y = 3 + s, z = 2 + 2s$ egyenesek

Megoldások:

- a) A sík irányvektora $\underline{v} = (4, -1, 2)$ és átmegegy az origón (O). A megadott $(0, 0, 12)$ pont legyen P . P távolsága az egyenestől nem más, mint az $\overrightarrow{OP} = (0, 0, 12)$ vektor \underline{v} -re merőleges komponensének hossza:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP}_{\underline{v}\perp} &= \overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \underline{v}}{\underline{v} \cdot \underline{v}} \underline{v} = (0, 0, 12) - \frac{(0, 0, 12) \cdot (4, -1, 2)}{(4, -1, 2) \cdot (4, -1, 2)} (4, -1, 2) = (0, 0, 12) - \frac{24}{21} (4, -1, 2) = \\ &= \left(-\frac{32}{7}, \frac{8}{7}, \frac{68}{7} \right) \implies d = \left| \left(-\frac{32}{7}, \frac{8}{7}, \frac{68}{7} \right) \right| = \frac{4}{7} |(-8, 2, 17)| = \frac{4}{7} \sqrt{8^2 + 2^2 + 17^2} = \frac{4}{7} \sqrt{357}. \end{aligned}$$

- b) A sík normálvektora $\underline{n} = (2, 1, 2)$, így normálegyenlete $\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}(2x + y + 2z - 4) = 0 \implies \frac{1}{3}(2x + y + 2z - 4) = 0$, így a megadott pont távolsága a síktól $d = \left| \frac{1}{3}(2 \cdot 0 + (-1) + 2 \cdot 0 - 4) \right| = \frac{5}{3}$.

- c) Az első egyenes irányvektora $\underline{v}_1 = (1, 3, 4)$ és egy pontja $P(2, 2, 3)$. A második egyenes irányvektora $\underline{v}_2 = (-1, 1, 2)$ és egy pontja $Q(1, 3, 2)$. A két egyenes távolsága nem más, mint a $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, -1)$ vektor $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ -vel (vagy szorzásával) párhuzamos komponensének hossza.

$$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = (1, 3, 4) \times (-1, 1, 2) = (2, -6, 4) \implies (1, -3, 2)$$

$$\overrightarrow{PQ}_{\underline{v}} = \frac{(-1, 1, -1) \cdot (1, -3, 2)}{(1, -3, 2) \cdot (1, -3, 2)} (1, -3, 2) = \frac{-6}{14} (1, -3, 2) = \frac{-3}{7} (1, -3, 2)$$

$$d = \frac{3}{7} |(1, -3, 2)| = \frac{3}{7} \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \frac{3}{7} \sqrt{14} = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$$

11. (Gy) Határozzuk meg az $x + y = 1$ és $2x + y - 2z = 2$ síkok szögét!

Megoldások: A két sík szöge megegyezik a normálvektoraik, vagyis a $\underline{v}_1 = (1, 1, 0)$ és $\underline{v}_2 = (2, 1, -2)$ vektorok szögével.

$$\cos \sphericalangle(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \frac{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2}{|\underline{v}_1| \cdot |\underline{v}_2|} = \frac{(1, 1, 0) \cdot (2, 1, -2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2} \sqrt{23}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \sphericalangle(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \frac{\pi}{4} (45^\circ)$$

(Gy) - gyakorló feladatok, (*) - gondolkodtató feladatok