7. gyakorlat - Megoldások
Matematika A1

1. (Gy) Számítsuk ki az alábbi értékeket!

a) $\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1$ b) $\operatorname{arsh} 2$ c) $\operatorname{th}(\ln 5)$

d) $\arcsin \sin \dfrac{10\pi}{3}$ e) $\cos \operatorname{arctg} 5$ f) $\cos \arcsin x$

Megoldás:

a) $\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1 = \dfrac{e^1 - e^{-1}}{2} + \dfrac{e^1 + e^{-1}}{2} = \dfrac{2e}{2} = e$

b) $\operatorname{arsh} 2 = x$, ha $\operatorname{sh} x = 2$, azaz $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$. Az e^{-x}-et $\frac{1}{e^x}$-ként írva, és az egyenletet átrendezve e^x-re egy másodfokú egyenletet kapunk: $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$, amiből $e^x = 2 \pm \sqrt{5}$. De $e^x > 0$ miatt ebből csak a pozitív a jó megoldás, így $x = \ln(2 + \sqrt{5})$, azaz $\operatorname{arsh} 2 = \ln(2 + \sqrt{5})$.

c) $\operatorname{th}(\ln 5) = \dfrac{\operatorname{sh} \ln 5}{\operatorname{ch} \ln 5} = \dfrac{(e^{\ln 5} - e^{-\ln 5})/2}{(e^{\ln 5} + e^{-\ln 5})/2} = \dfrac{5 - \frac{1}{5}}{5 + \frac{1}{5}} = \dfrac{12}{13}$.

d) $\arcsin \sin \frac{10\pi}{3} = \alpha$, ahol $\sin \alpha = \sin \frac{10\pi}{3}$, és $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mivel $\sin \frac{10\pi}{3} = \sin \frac{4\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{4\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3})$, és $-\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, azt kapjuk, hogy $\arcsin \sin \frac{10\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$.

e) $\alpha = \operatorname{arctg} 5 \in (0, \frac{\pi}{2})$, tehát α egy derékszögű háromszög egyik szöge, amelynek befogói 5 és 1 hosszúak (az α-val szemközti 5). Ennek a háromszögnek az átfogója $\sqrt{26}$, így $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

f) Azt tudjuk, hogy $\sin(\arcsin x) = x$, a koszinuszt pedig kifejezhetjük a szinusszal: általában $\cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, de $\alpha = \arcsin x$-re $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, így $\cos \alpha \geq 0$, tehát erre $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, és ebből $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$.

2. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat!

a) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ b) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ c) $\operatorname{ch} \operatorname{arth} x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Megoldás:

a) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} + \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \dfrac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch} 2x$

b) $2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = 2\frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x$

c) $\operatorname{th} \operatorname{arth} x = x$, vagyis $\dfrac{\operatorname{sh} \operatorname{arth} x}{\operatorname{ch} \operatorname{arth} x} = x$. Ugyanakkor $\operatorname{ch}^2 \operatorname{arth} x - \operatorname{sh}^2 \operatorname{arth} x = 1$, tehát $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \operatorname{arth} x - 1}}{\operatorname{ch} \operatorname{arth} x} = x$. Ebből $\operatorname{ch} \operatorname{arth} x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

3. Határozzuk meg az alábbi függvények inverzét! Ha a függvény nem invertálható a teljes értelmezési tartományán, akkor keressünk olyan maximális részintervallumot, amelyen már invertálható! Ábrázoljuk a függvényt és az inverzét!

a) $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ b) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ c) $f(x) = \sqrt{x - 5}$

Megoldás:

a) f invertálható az egész értelmezési tartományán, $\mathbb{R} \setminus \{1\}$-en, és inverze önmaga, ugyanis $y = \dfrac{x}{x - 1} \iff x = \dfrac{y}{y - 1}$.

b) $f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1$ parabola, amely $(-\infty, 3]$-on fogyó, $[3, +\infty)$-en növő. Szorítsuk meg f-et $[3, +\infty)$-re (azaz az inverz függvény kiszámításánál a két lehetséges őskép közül a nagyobbikat válasszuk)! $y = (x - 3)^2 - 1 \iff x - 3 = \pm\sqrt{y + 1} \iff x = 3 \pm \sqrt{y + 1}$, tehát a nagyobbik megoldás $x = 3 + \sqrt{y + 1}$. Így az inverz függvény $g(y) = 3 + \sqrt{y + 1}$, vagy x változóval fölírva $g(x) = 3 + \sqrt{x + 1}$, amely f (megszorítottjának) értékkészletén, $[-1, +\infty)$-n van értelmezve.

c) f szigorúan monoton növő az értelmezési tartományán, $[5, +\infty)$-en, tehát invertálható is. $y = \sqrt{x - 5} \Rightarrow x = 5 + y^2$, tehát az inverz függvény $g(y) = 5 + y^2$, azaz $g(x) = 5 + x^2$ az f értékkészletére, azaz $[0, +\infty)$-re megszorítva.

4. Ábrázoljuk a $\sin(\arcsin x)$ és $\arcsin(\sin x)$ függvényeket!

Megoldás: Az arcsin függvény $[-1, 1]$-ből $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$-be képez, így $g(x) = \sin(\arcsin x)$ értelmezési tartománya $[-1, 1]$, és ezen a g függvény az arcsin függvény definíciójából adódóan megegyezik az $y = x$ függvénnyel.

Az $h(x) = \arcsin\sin x$ függvény minden x-hez az x-szel azonos szinuszú, $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közötti számot rendeli. Ez azt jelenti, hogy ha $2k\pi-\frac{\pi}{2} \le x \le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ (valamely k egész számra), akkor $h(x) = x-2\pi$, ha pedig $2k\pi+\frac{\pi}{2} \le x \le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$, akkor $h(x) = (2k+1)\pi-x$. Vagyis h grafikonja 1 és -1 meredekségű szakaszokból áll, amelyek a $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ helyeken felvett $\frac{\pi}{2}$ értékű, és a $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ helyeken felvett $-\frac{\pi}{2}$ értékű pontokat kötik össze.

5. (Gy) Fejezzük ki az $\ln x$ és e^x függvények segítségével az alábbi függvényeket!
   a) 5^x b) $\log_3 10$ c) $3^{\ln x}$ d) $x^{\sqrt{x}}$

   Megoldás:

   a) $5^x = e^{\ln 5^x} = e^{x\ln 5}$.

   b) $\log_3 10 = \dfrac{\ln 10}{\ln 3}$.

   c) $3^{\ln x} = (e^{\ln 3})^{\ln x} = e^{(\ln 3)(\ln x)}$.

   d) $x^{\sqrt{x}} = e^{\ln(x^{\sqrt{x}})} = e^{\sqrt{x}\ln x}$.

6. (Gy) Számítsuk ki a következő határértékeket!
   a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x\sqrt{x}-2}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$
   c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccos}\operatorname{th} x$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^{\ln x}$

   Megoldás:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x\sqrt{x}-2}} \cdot \frac{x^{3/4}}{x^{3/4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^{1/4}} + \frac{1}{x^{9/4}}} - \sqrt[4]{1}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^{6/4}}}} = \frac{\sqrt[3]{0+0} - \sqrt[4]{1}}{\sqrt{1-0}} = 1$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\sin\arcsin x} = \lim_{\arcsin x\to 0} \frac{\arcsin x}{\sin\arcsin x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$

   c) $x \to -\infty$ esetén $\operatorname{th} x \to -1$. Ha pedig $y \to -1$, akkor $\arccos y \to \pi$, vagyis $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \arccos\operatorname{th} x = \pi$

   d) $x^{\ln x} = (e^{\ln x})^{\ln x} = e^{(\ln x)^2}$. $x \to 0+$ esetén $\ln x \to -\infty$ és így $(\ln x)^2 \to \infty$. Ha pedig $y \to \infty$, akkor $e^y \to \infty$, vagyis $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^{\ln x} = \infty$

7. Határozzuk meg az $f(x) = \operatorname{tg}\arccos\frac{x}{x+1}$ függvény értelmezési tartományát, szakadási pontjait és aszimptotáit!

   Megoldás: Az értelmezési tartomány meghatározásához a függvény egyes részeit külön-külön vizsgáljuk. A legbelső függvény $\dfrac{x}{x+1}$. Itt a nevező nem lehet 0, vagyis $x \neq -1$. Az $\arccos x$ függvény értelmezési tartománya a $[-1, 1]$ intervallum. Ez a mi esetünkben azt jelenti, hogy $-1 \le \dfrac{x}{x+1} \le 1$-nek teljesülnie kell. Ha $x+1 > 0$, vagyis $x > -1$, akkor a feltétel $-x-1 \le x \le x+1$ alakba írható, ami $x \ge -\dfrac{1}{2}$ esetén teljesül. Ha $x+1 < 0$, akkor hasonlóan kapjuk, hogy $-x-1 \ge x \ge x+1$, ami a második egyenlőtlenség miatt sosem teljesülhet. A $\operatorname{tg} x$ függvény a $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ alakú értékekre nincs értelmezve. A mi esetünkben (mivel az $\arccos x$ függvény értékkészlete a $[0, \pi]$ intervallum) ez azt jelenti, hogy $\arccos\dfrac{x}{x+1} \neq \dfrac{\pi}{2}$, vagyis $\dfrac{x}{x+1} \neq 0$, vagyis $x \neq 0$. Összefoglalva azt kapjuk, hogy az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D(f) = [-\dfrac{1}{2}, \infty) \setminus \{0\}$.

   A $\operatorname{tg} x$,$\arccos x$,$\dfrac{x}{x+1}$ függvények az értelmezési tartományaikon folytonosak, így ahol f értelmezve van, ott folytonos is. Szakadási helye egy függvénynek csak olyan pontban lehet, aminek kis környezetében a függvény értelmezve van, ezér a mi esetünkben f-nek csak a 0-ban van szakadási helye.

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{tg}\arccos\frac{x}{x+1} = \lim_{y\to 0+} \operatorname{tg}\arccos y = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} z = \infty$$

   és

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{tg}\arccos\frac{x}{x+1} = \lim_{y\to 0-} \operatorname{tg}\arccos y = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} z = -\infty,$$

   vagyis a 0 pólusa f-nek.

   Vízszintes és ferde aszimptotája f-nek csak ∞-ben lehet, itt pedig

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tg}\arccos\frac{x}{x+1} = \lim_{y\to 1-} \operatorname{tg}\arccos y = \lim_{z\to 0+} \operatorname{tg} z = 0,$$

vagyis az $y = 0$ egyenes vízszintes aszimptotája f-nek és f-nek nincs ferde aszimptotája. A 0-beli határértékek alapján pedig az $x = 0$ egyenes függőleges aszimptotája f-nek. Függőleges aszimptota még az értelmezési tartomány szélén, $x = \dfrac{1}{2}$-ben lehetne, de itt

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \operatorname{tg} \arccos \frac{x}{x+1} = \lim_{y \to -1+} \operatorname{tg} \arccos y = \lim_{z \to \pi+} \operatorname{tg} z = 0.$$

8. (*) Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.
Megoldás: A tg függvényre vonatkozó addíciós formula

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Ez alapján

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{1}{3})}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}) \operatorname{tg}\, (\operatorname{arctg} \frac{1}{3})} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}} = 1,$$

vagyis $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.
2. megoldás: $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2}$ a szöge annak az $a + bi$ komplex számnak, amelyre $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$, például a $2 + i$-nek. Hasonlóan $\beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ a $3 + i$ komplex szám szöge. $\alpha + \beta$ pedig a két komplex szám szorzatának a szöge. $(2 + i)(3 + i) = 5 + 5i$, amelynek szöge $\dfrac{\pi}{4}$.

(Gy) - gyakorló feladatok, (*) - gondolkodtató feladatok