

10. feladatsor - Megoldások
Matematika A1

1. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $x^4 - 3x^2 + 2$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ d) $\frac{x^4 + 2x - 1}{x}$

Megoldások:

a) $\int x^4 - 3x^2 + 2 dx = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + 2x + C$

b) $\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{2/3} dx = \frac{3}{5}x^{5/3} + C$

c) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx = \int x^{7/8} dx = \frac{8}{15}x^{15/8} + C$

d) $\int \frac{x^4 + 2x - 1}{x} dx = \int x^3 + 2 - \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4}x^4 + 2x - \ln|x| + C$

2. Keressük meg azt az $f(x)$ függvényt, amelyre

a) $f'(x) = 4x + \sin x$, és $f(0) = 0$; b) $f''(x) = 6x^2 + \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $f(1) = 0$, és $f'(1) = 2$.

Megoldás:

a) $f(x) = \int 4x + \sin x dx = 2x^2 - \cos x + C$, és $0 = f(0) = -1 + C$, tehát $C = 1$, és $f(x) = 2x^2 - \cos x + 1$.

b) $f'(x) = \int 6x^2 + x^{-3/2} dx = 2x^3 - 2x^{-1/2} + C$, és $2 = f'(1) = 2 - 2 + C$, így $C = 2$ és $f'(x) = 2x^3 - 2x^{-1/2} + 2$. Ebből $f(x) = \int 2x^3 - 2x^{-1/2} + 2 dx = \frac{1}{2}x^4 - 4x^{1/2} + 2x + D$, és $0 = f(1) = \frac{1}{2} - 4 + 2 + D$, tehát $D = \frac{3}{2}$, és $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4\sqrt{x} + 2x + \frac{3}{2}$.

3. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját az $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ összefüggést használva!

a) $\sqrt[4]{2-3x}$ b) $\frac{e^x + 1}{e^{2x}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{1+3x^2}}$

Megoldás:

a) $\int \sqrt[4]{2-3x} dx = \int (-3x+2)^{1/4} dx = \frac{4}{5}(-\frac{1}{3})(-3x+2)^{5/4} + C = -\frac{4}{15}(-3x+2)^{5/4} + C$

b) $\int \frac{e^x + 1}{e^{2x}} dx = \int e^{-x} + e^{-2x} dx = -e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{1+3x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{3}x)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arsh}(\sqrt{3}x) + C$

4. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját az $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ összefüggést használva!

a) $\frac{x^3}{x^4 + 4}$ b) $\operatorname{tg} 3x$ c) $\frac{1}{x \ln x}$

Megoldás:

a) $\int \frac{x^3}{x^4 + 4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{(x^4 + 4)'}{x^4 + 4} dx = \frac{1}{4} \ln|x^4 + 4| + C = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 4) + C$

b) $\int \operatorname{tg} 3x dx = \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{(\cos 3x)'}{\cos 3x} dx = -\frac{1}{3} \ln|\cos 3x| + C$

c) $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\frac{x}{\ln x}} dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + C$

5. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját az $\int f^a(x)f'(x)dx = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1} + C$ összefüggést használva!

a) $\sin^4 x \cos x$

b) $x\sqrt{x^2+1}$

c) $\frac{\ln x}{x}$

Megoldás:

a) $\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x (\sin x)' dx = \frac{\sin^5 x}{5} + C$

b) $\int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{1/2} (x^2+1)' dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3} (x^2+1)^{3/2} + C$

c) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x (\ln x)' dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

6. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját az általános $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$ összefüggést használva!

a) xe^{x^2}

b) $\frac{\sin(\ln x)}{x}$

c) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Megoldás:

a) $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} 2x dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} (x^2)' dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

b) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int \sin(\ln x) (\ln x)' dx = -\cos(\ln x) + C$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} (-2x) dx = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} (1-x^2)' dx = -(1-x^2)^{1/2} + C$

7. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját trigonometrikus átalakítások segítségével!

a) $\operatorname{tg}^2 x$

b) $\cos^5 x \operatorname{tg} x$

c) $\sqrt{1+\cos 4x}$

Megoldás:

a) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \operatorname{tg} x - x + C$

b) $\int \cos^5 x \operatorname{tg} x dx = \int \cos^4 x \sin x dx = -\int \cos^4 x (\cos x)' dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$

c) $\int \sqrt{1+\cos 4x} dx = \int \sqrt{2 \left(\frac{1+\cos 4x}{2} \right)} dx = \int \sqrt{2(\cos^2 2x)} dx = \sqrt{2} \int \cos 2x dx = \sqrt{2} \frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} + C$ (ez a határozatlan integrál olyan I intervallumon érvényes, ahol $\cos 2x \geq 0$)

8. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját helyettesítéssel integrálással!

a) $e^{3x}\sqrt{e^x-1}$

b) $\frac{x^3}{(x^2+1)^5}$

c) $\frac{1}{\sqrt{x(\sqrt[3]{x}+1)}}$

Megoldás:

a) $u = e^x - 1$ helyettesítéssel $du = e^x dx$, így $\int e^{3x}\sqrt{e^x-1} dx = \int e^{2x}\sqrt{e^x-1} e^x dx = \int (u+1)^2 \sqrt{u} du = \int u^{5/2} + 2u^{3/2} + u^{1/2} du = \frac{2}{7} u^{7/2} + \frac{4}{5} u^{5/2} + \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{7} (e^x-1)^{7/2} + \frac{4}{5} (e^x-1)^{5/2} + \frac{2}{3} (e^x-1)^{3/2} + C$

b) $u = x^2 + 1$ helyettesítéssel $du = 2x dx$, és $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^5} dx = \int \frac{1}{2} \frac{x^2}{(x^2+1)^5} 2x dx = \int \frac{1}{2} \frac{u-1}{u^5} du = \int \frac{1}{2} u^{-4} - \frac{1}{2} u^{-5} du = -\frac{1}{6} u^{-3} + \frac{1}{8} u^{-4} + C = -\frac{1}{6} (x^2+1)^{-3} + \frac{1}{8} (x^2+1)^{-4} + C$

c) $u = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel $du = \frac{1}{6} x^{-5/6} dx$, és $\int \frac{1}{\sqrt{x(\sqrt[3]{x}+1)}} dx = \int \frac{6x^{5/6}}{x^{1/2}(x^{1/3}+1)} \cdot \frac{1}{6} x^{-5/6} dx = \int \frac{6x^{1/3}}{x^{1/3}+1} \cdot \frac{1}{6} x^{-5/6} dx = \int \frac{6u^2}{u^2+1} du = \int 6 - \frac{6}{u^2+1} du = 6u - 6 \operatorname{arctg} u + C = 6\sqrt[3]{x} - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x} + C$

9. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját parciális integrálással!

a) $\frac{x^2 - x + 2}{e^{2x}}$ b) $e^{3x} \cos 2x$ c) $\ln x$ d) $\ln^2 x$

Megoldás: A megoldásokban aláhúzás mutatja azt a tagot, amelyik a parciális integrálás során deriválódik.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int (x^2 - x + 2) \cdot e^{-2x} dx &= (x^2 - x + 2) \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} - \int (2x - 1) \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} dx = -\frac{x^2 - x + 2}{2} \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2} \int (2x - 1) \cdot \\ e^{-2x} dx &= -\frac{x^2 - x + 2}{2} \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2} (2x - 1) \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} - \frac{1}{2} \int 2 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} dx = -\frac{x^2 - x + 2}{2} \cdot e^{-2x} - \frac{2x - 1}{4} \cdot \\ e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C &= \left(-\frac{1}{2} x^2 - 1 \right) \cdot e^{-2x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int e^{3x} \cdot \cos 2x dx &= \frac{e^{3x}}{3} \cdot \cos 2x - \int \frac{e^{3x}}{3} \cdot (-2 \sin 2x) dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cdot \cos 2x + \frac{2}{3} \int e^{3x} \cdot \sin 2x dx = \\ \frac{1}{3} e^{3x} \cdot \cos 2x + \frac{2}{3} \cdot \frac{e^{3x}}{3} \cdot \sin 2x - \frac{2}{3} \int \frac{e^{3x}}{3} \cdot 2 \cos 2x dx &= \frac{1}{3} e^{3x} \cos 2x + \frac{2}{9} e^{3x} \cdot \sin 2x - \frac{4}{9} \int e^{3x} \cdot \cos 2x dx. \\ \text{Ebből az ismeretlen } I = \int e^{2x} \cos 3x dx \text{ integrálra az } I &= \frac{1}{3} e^{3x} \cos 2x + \frac{2}{9} e^{3x} \cdot \sin 2x - \frac{4}{9} I \text{ egyenletet} \\ \text{kapjuk. Így } I &= \frac{3}{13} e^{3x} \cdot \cos 2x + \frac{2}{13} e^{3x} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int 1 dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$\text{d) } \int \ln^2 x dx = \int 1 \cdot \ln^2 x dx = x \cdot \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln^2 x - 2 \int \ln x dx = (\text{előző alapján}) = x \cdot \ln^2 x - 2x \cdot \ln x + 2x + C$$

10. (Gy) Számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integrálját a megfelelő összefüggés/módszer használatával!

a) $\sin \sqrt{x}$ b) $\frac{1}{x^2 + 4}$ c) $(x + 2) \cos x$ d) $\cos x \sin^3 x$
 e) $\cos^4 x$ f) $\frac{e^x}{e^x + 1}$ g) $\frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ h) $\text{sh } x \sin x$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \text{a) } u = \sqrt{x} \text{ helyettesítéssel } du &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \text{ így } \int \sin \sqrt{x} dx = \int \sin \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \sin u \cdot \\ 2u du &= (\text{parciálisan integrálva}) = -\cos u \cdot 2u - \int -\cos u \cdot 2 du = -\cos u \cdot 2u + 2 \int \cos u du = \\ -\cos u \cdot 2u + 2 \sin u + C &= -\cos \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \frac{\arctg\left(\frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{1}{2}x\right) + C$$

$$\text{c) Parciálisan integrálva: } \int (x + 2) \cos x dx = (x + 2) \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = (x + 2) \sin x - (-\cos x) + C = (x + 2) \sin x + \cos x + C$$

$$\text{d) } \int \cos x \sin^3 x dx = \int \sin^3 x (\sin x)' dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int 1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x dx = \frac{1}{4} \int 1 + 2 \cos 2x + \\ \frac{1 + \cos 4x}{2} dx &= \frac{1}{4} \left(x + 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 4x}{4} \right) \right) + C = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \end{aligned}$$

$$\text{f) } \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = \ln |e^x + 1| + C = \ln(e^x + 1) + C$$

$$\text{g) } u = \sqrt{x} \text{ helyettesítéssel } du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \text{ így } \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cos u du = 2 \sin u + C = 2 \sin \sqrt{x} + C$$

$$\begin{aligned} \text{h) Parciálisan integrálva kétszer: } \int \text{sh } x \cdot \sin x dx &= \text{ch } x \cdot \sin x - \int \text{ch } x \cdot \cos x dx = \text{ch } x \cdot \sin x - \\ \text{sh } x \cdot \cos x + \int \text{sh } x \cdot (-\sin x) dx. &\text{ Ebből az ismeretlen } I = \int \text{sh } x \cdot \sin x dx \text{ integrálra az } I = \\ \text{ch } x \cdot \sin x - \text{sh } x \cdot \cos x - I &\text{ egyenletet kapjuk. Így } I = \frac{\text{ch } x \cdot \sin x - \text{sh } x \cdot \cos x}{2} + C. \end{aligned}$$

(Gy) - gyakorló feladatok, (*) - gondolkodtató feladatok