

2. gyakorlat
Matematika A1

1. Egy egységélű kocka alaplappja $ABCD$ fedőlapja pedig $A_1B_1C_1D_1$, ahol az egyes csúcsok az alap azonos betűvel jelzett csúcsa fölött vannak. Számítsuk ki a következő kifejezéseket (ahol az eredmény vektor, azt a kocka valamely két csúcsát összekötő vektorként adjuk meg).

a) $\vec{AB} + \vec{CC_1}$	b) $\vec{AB} + \vec{AC_1} + \vec{BD_1} + \vec{C_1B}$	c) $\vec{AB} \cdot \vec{AB_1}$
d) $ \vec{AB} \times \vec{AD_1} + \vec{AB} $	e) $\vec{AC} \cdot \vec{D_1A}$	
2. Igaz-e, hogy ha $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, és $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b}$?
3. Egyszerűsítsük a következő szorzatokat:

a) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})$	b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$
c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ vegyszorzat	
4. Ha $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ egységvektorok, és $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, akkor mennyi $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$?
5. Bizonyítsuk be, hogy $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha \mathbf{a} párhuzamos \mathbf{b} -vel vagy \mathbf{a} merőleges \mathbf{b} -re. (Úgy tekintjük, hogy a $\mathbf{0}$ vektor mindennel párhuzamos és mindenre merőleges.)
6. Legyen $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$ és $\mathbf{w} = (1, 0, 0)$. Számítsuk ki a következő kifejezéseket:

a) \mathbf{uv}	b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$	c) \mathbf{uvw}
d) $(\mathbf{uv})\mathbf{w}$	e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$	

 Keressünk \mathbf{u}, \mathbf{v} -hez olyan vektort, amely mindkettőre merőleges.
7. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ vektor vetületét a $\mathbf{b} = (0, 1, -1)$ vektorra! Állítsuk elő az \mathbf{a} vektort egy \mathbf{b} vektorra merőleges és egy \mathbf{b} vektorral párhuzamos vektor összegeként!
8. a) Mekkora a $(2, -1)$ és $(-1, 3)$ vektorok szöge?
 a) Milyen t értékre lesz az $(1, t, 1)$ és $(t, -1, 1)$ vektorok szöge 60° ?
 a) Tegyük fel, hogy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, és $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - 2\mathbf{b}|$. Mekkora az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok szöge?
9. Mekkora az $(1, 0, -1)$, $(2, 2, 3)$, $(0, 1, 0)$ és $(1, 2, 1)$ csúcsok által meghatározott tetraéder térfogata?
10. Lineárisan összefüggők-e, illetve a t milyen értékre lineárisan összefüggők az alábbi vektorrendszerek?

a) $(1, 1, 0), (2, 2, 0), (0, 1, 2)$	b) $(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$
c) $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$	d) $(2, t, 1), (4, 3t, 2)$
e) $(1, 2, t), (0, t, -1), (1, 0, 3)$	
11. Írjuk föl, az $(1, 2, 3)$ vektort a 10.c) feladat vektorainak lineáris kombinációjaként, ha lehetséges!
12. Legyenek \mathbf{a}, \mathbf{b} és \mathbf{c} lineárisan függetlenek. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ és $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ vektorok?