1. *Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x+1}{3x+9}$ határértéket, és $\varepsilon = \frac{1}{10}$-hez adjunk meg egy olyan M értéket, hogy ennél nagyobb x-ekre a függvény már ε-nál közelebb van a határértékhez!*

Megoldás: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5+\frac{1}{x}}{3+\frac{9}{x}} = \frac{5}{3}$.

$\left|\frac{5x+1}{3x+9} - \frac{5}{3}\right| = \left|\frac{5x+1-5x-15}{3x+9}\right|$, ami $x > 0$-ra $= \frac{14}{3x+9}$, és $x \to \infty$ miatt feltehető, hogy $x > 0$.

Ha $x > 0$, akkor $\dfrac{14}{3x+9} < \varepsilon = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow 140 < 3x + 9 \Leftrightarrow x > \frac{131}{3} = 43\frac{2}{3}$. Így $M = 44$-re és $x > M$-re a függvényérték $\frac{1}{10}$-nél közelebb van a határértékhez.

2. *A határértékek műveleti szabályait felhasználva számítsuk ki az alábbi limeszeket (ha csak egyoldali limesz létezik, akkor azt)!*

a) $\lim\limits_{x\to 2} (x-2)\sin x + \dfrac{x}{x^2+3}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^3}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3}{(1-x)^3} + \dfrac{1}{x-1}$

Megoldás: a) 2/7. (Az első tag a rendőrelv miatt tart 0-hoz (ha a sin függvény folytonosságát nem használjuk): $-|x-2| \le (x-2)\sin x \le |x-2|$).

b) Nem létezik, de $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$, és $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3}{(1-x)^3} + \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{-3+(x-1)^2}{(x-1)^3}$. A kétoldali limesz nem létezik, de 1^--ban $\frac{-3}{0^-} = +\infty$, és 1^+-ban $\frac{-3}{0^+} = -\infty$.

3. *Alkalmas egyszerűsítés segítségével számítsuk ki a következő határértékeket!*

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ *c)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x$

Megoldás: a) $\dfrac{0}{0}$ típusú, de egyszerűsíthetünk a 0-hoz tartó tényezővel:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(5x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{5x+1}{x+1} = \frac{6}{2} = 3$.

b) $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú. Emeljük ki a leggyorsabban ∞-hez tartó hatványt:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(5-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(5-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2})}{(1-\frac{1}{x^2})} = 5$.

c) $-\infty + \infty$ típusú. Hozzuk közös nevezőre, aztán a b) esethez hasonlóan alakítsuk: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3+3x^2-x^3-x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x^2-x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 3$.

A főtagok kiemelésével könnyen látható, hogy $\frac{polinom}{polinom}$ alakú kifejezések limesze $\pm\infty$-ben megegyezik a főtagok hányadosának limeszével, így a b), c) feladatok megoldása ennek segítségével is kiszámítható: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2}{x^2} = 5$, és c)-ben közös nevezőre hozás után $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x^2-x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$.

4. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket a rendőrelv segítségével!*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\sin x}{x^2-1}$ *b)* $x^3 \cos\left(\dfrac{2-x}{x^5}\right)$ *c)* $\dfrac{5x^2-\sin(3x-1)}{x^2-1}$

Megoldás: a) A számlálónak nincs határértéke, viszont korlátos: $0 \le 1 + \sin x \le 2$, a nevező pedig ∞-hez tart. Így $x \ge 1$-re $0 \le \frac{1+\sin x}{x^2-1} \le \frac{2}{x^2-1} \to 0$, ha $x \to \infty$, tehát a rendőrelv miatt $\frac{1+\sin x}{x^2-1} \to 0$.

b) $0 \le \left|x^3 \cos\left(\frac{2-x}{x^5}\right)\right| \le |x^3| \to 0$, így $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \cos\left(\frac{2-x}{x^5}\right) = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-\sin(3x-1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5-\frac{1}{x^2}\sin(3x-1)}{1-\frac{1}{x^2}} = 5$, mert $0 \le \left|\frac{1}{x^2}\sin(3x-1)\right| \le \frac{1}{x^2} \to 0$ miatt $\frac{1}{x^2}\sin(3x-1) \to 0$.

5. *A következő határértékek kiszámításánál használjunk trigonometrikus azonosságokat, illetve a* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ *határértéket!*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x(\pi - x)}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$ *d)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$

Megoldás: a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}{\frac{\sin x}{x}\cdot x} \cdot \frac{1}{\cos 4x} = 4$.

b) $\frac{0}{0}$ típusú. Felhasználva, hogy $\sin x = \sin(\pi - x)$, az $y = \pi - x$ helyettesítéssel $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin(\pi-x)}{(\pi-x)} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, így $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x(\pi-x)} = \frac{1}{\pi}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{3}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{2}{3}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos^2 x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$.

6. *Definíció alapján bizonyítsuk be, hogy* $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, *ha* $a > 0$, *és* $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$.

Megoldás: $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|} \le \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$, ha $|x-a| < \varepsilon\sqrt{a}$. Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, esetünkben $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ megfelel, hogy $0 < |x-a| < \delta$ esetén $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$.
∞-ben: $\sqrt{x} > K$, ha $x > K^2$, tehát minden $K > 0$-hoz van olyan M (esetünkben $M = K^2$ megfelel), hogy $x > M$ esetén $\sqrt{x} > K$.

7. *Számítsuk ki az alábbi limeszeket! Ahol szükséges, "gyöktelenítsünk"!*

a) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$ *b)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3} - x$ *c)* $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$

Megoldás: a) $\frac{0}{0}$ típusú; gyöktelenítés után lehet a 0-hoz tartó tényezővel egyszerűsíteni:
$\lim\limits_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} = \lim\limits_{x\to 6} \frac{(\sqrt{x-2}-2)(\sqrt{x-2}+2)}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)} = \lim\limits_{x\to 6} \frac{(\sqrt{x-2})^2-2^2}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)} = \lim\limits_{x\to 6} \frac{x-6}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)} = \lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{\sqrt{x-2}+2} = \frac{1}{4}$.

b) $\infty - \infty$ típusú. A legnagyobb x-hatvány kiemelése csak $\infty \cdot 0$ típusú limeszhez vezetne, ezért előbb gyöktelenítünk. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(2+\frac{3}{x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)} = 1$.

c) $\frac{0}{0}$ típusú. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{(6x^2+3)-9x^2} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{-3(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{-3(x-1)} = \frac{6}{6} = 1$.

8. *Határozzuk meg az alábbi függvények összes aszimptotáját!*

a) $f(x) = \dfrac{2x^2-x}{x-1}$ *b)* $g(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$ *c)* $h(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2}$

Megoldás: a) f folytonos $\mathbb{R} \setminus \{1\}$-en, tehát függőleges aszimptotája legföljebb $x = 1$-ben lehet. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, tehát $x = 1$ valóban aszimptota. f limesze ∞-ben ∞, $-\infty$-ben $-\infty$, tehát itt vízszintes aszimptota nem lehet. Ellenőrizzük, hogy van-e ferde aszimptotája a függvénynek ∞-ben, illetve $-\infty$-ben! $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x(x-1)} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$, és $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-x-2x^2+2x}{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$, tehát ∞-ben $y = 2x+1$ aszimptota, és könnyen látható, hogy $-\infty$-ben is ugyanezeket a limeszeket kapjuk, tehát ott is ugyanez a ferde aszimptota van. (A ferde aszimptotákat ebben az esetben polinomosztással is megtalálhatjuk: $\frac{2x^2-x}{x-1} = \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = (2x+1) + \frac{1}{x-1}$, és a második tag a végtelenekben 0-hoz tart, így $f(x) - (2x+1)$ 0-hoz tart, azaz $y = 2x+1$ aszimptotája a függvénynek mindkét végtelenben.)

b) A g függvény értelmezve van az egész $\mathbb{R}$-en, mert $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0$ minden x-re, és g folytonos az egész értelmezési tartományán. Így legföljebb $\pm\infty$-ben lehet aszimptotája. Mindkét végtelenben végtelenhez tart a függvény. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} = 1$, tehát ha van aszimptotája a végtelenben, az 1 meredekségű: $y = x+b$. A 7.b) feladatban bizonyítottuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - x = 1$, tehát $b = 1$, és ∞-ben az $y = x+1$ ferde aszimptota.

$-\infty$-ben viszont $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x} = -1$, és $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+3} + x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x(2+\frac{3}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1} = -1$, tehát $-\infty$-ben az aszimptota $y = -x-1$.

c) A h függvény értelmezve van és folytonos, ahol a nevező nem 0, azaz $x \neq -1, 2$. Függőleges aszimptota legföljebb ezekben a pontokban lehet. $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$, tehát itt nincs aszimptota, viszont $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$ (és -1^+-ban $-\infty$), tehát $x = -1$ függőleges aszimptota.

$\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$, és ugyanígy $-\infty$-ben is, tehát ∞-ben és $-\infty$-ben is vízszintes aszimptota az $y = 1$.