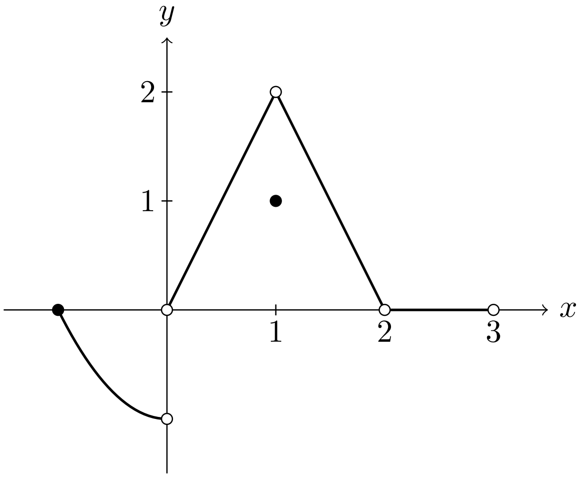
6. gyakorlat
Matematika A1

1. *Ábrázoljuk az*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & ha\ -1 \le x < 0 \\ 2x, & ha\ 0 < x < 1 \\ 1, & ha\ x = 1 \\ -2x + 4, & ha\ 1 < x < 2 \\ 0, & ha\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

függvényt. Vizsgáljuk meg folytonosság és egyoldali folytonosság szempontjából az $x = -1, 0, 1, 2, 3$ helyeket! Van-e az $f(x)$ függvénynek megszüntethető szakadása?

Megoldás:



Az $f(x)$ függvény -1-ben jobbról folytonos, $0, 1, 2$-ben szakadása van, 3-ban nem folytonos balról sem, mert nincs értelmezve. 0-ban ugrása van: a bal oldali határérték -1, a jobb oldali 0. 1-ben megszüntethető szakadása van: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, és $f(1) = 1$. 2-ben pedig hézagpontja, ami szintén megszüntethető szakadás: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$, és f nincs értelmezve 2-ben.

2. *Hol folytonosak az alábbi függvények, és milyen típusúak a szakadásaik?*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6}$ *b)* $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4x + 3}$ *c)* $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{|x^2 - 1|}$

d) $\dfrac{\cos x}{x}$ *e)* $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ *f)* $f(x) = \dfrac{x \operatorname{tg} x}{x^2 + 1}$

Megoldás: a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, és ezen f folytonos is.

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x + 1)(x - 3)}{2(x - 3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x + 1}{2} = 2$, tehát f-nek a 3-ban megszüntethető szakadása (ezen belül hézagpontja) van.

b) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4x + 3} = \dfrac{x + 1}{(x - 1)(x - 3)}$, amiből látható, hogy $f(x)$ 1-ben és 3-ban nincs értelmezve, és mindkét helyen egyik oldalról $-\infty$-hez, másikról $+\infty$-hez tart a függvény, tehát f-nek 1-ben és 3-ban pólusa van.

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{|x^2 - 1|} = x \cdot \dfrac{x^2 - 1}{|x^2 - 1|} = \begin{cases} -x, & \text{ha } |x| < 1 \\ x, & \text{ha } |x| > 1 \end{cases}$. Tehát a függvény a ± 1 pontok kivételével folytonos, -1-ben és 1-ben is balról -1-hez, jobbról 1-hez tart, tehát mindkét pontban ugrása van.

d) Csak az $x = 0$-ban van szakadása. $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$, és $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, tehát $f(x)$-nek 0-ban pólusa van.

e) A függvény csak ott nincs értelmezve (és csak ott nem folytonos), ahol a nevező 0, azaz az $a = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ helyeken. Itt a függvény limesze: $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\sin^2 x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to a} 1 + \cos x = 1 + \cos a = 2$, ezért ezek megszüntethető szakadások.

f) Csak ott nincs értelmezve, ahol $\operatorname{tg} x$ nincs értelmezve, azaz $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\, \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$, és minden más pontban folytonos is a függvény. A tg függvénynek a szakadásaiban pólusa van, s mivel ezeken a helyeken $\dfrac{x}{x^2+1}$ nem nulla valós számhoz tart, $f(x)$ is ∞-hez, illetve $-\infty$-hez tart a szakadási pontok egyik, illetve másik oldalán. Ezért f-nek ezekben a pontokban pólusa van.

3. *Határozzuk meg a paraméterek értékét úgy, hogy az alábbi függvények mindenütt folytonosak legyenek!*

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{ha } x < 3 \\ 2ax, & \text{ha } x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x^2 - \sin^2 x}}{x}, & \text{ha } x < 0 \\ ax + b, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$

Megoldás: a) $(-\infty, 3)$-on és $(3, +\infty)$-en folytonos a függvény, mert ezeken a nyílt intervallumokon megegyezik egy-egy polinommal. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} x^2 - 1 = 8$, és $f(3) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} 2ax = 6a$, tehát f akkor folytonos 3-ban, ha $6a = 8$, azaz ha $a = \frac{4}{3}$.

b) $f(x)$ folytonos a $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ és $(1, \infty)$ intervallumok mindegyikén, mert az f-et itt definiáló függvények folytonosak. (Az első függvényről ugyan ellenőrizni kell, hogy valóban értelmezve van-e a tartományon, de geometriai okoskodással látható, hogy $x \geq \sin x$, ha $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, és $x \geq \frac{\pi}{2} > 1 \geq |\sin x|$, ha $x \geq \frac{\pi}{2}$, végül $x < 0$-ra $x^2 - \sin^2 x = (-x)^2 - \sin^2(-x) \geq 0$, tehát $2x^2 - \sin^2 x \geq x^2 \geq 0$.) Így csak azt kell megnézni, hogy milyen feltételek mellett egyezik meg az illesztési pontban a jobb- és bal oldali határérték és a függvényérték.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{2x^2 - \sin^2 x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|\sqrt{2 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -\sqrt{2 - \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2} = -1$, míg $f(0) = b = \lim\limits_{x\to 0^+} ax + b = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, tehát a függvény akkor és csak akkor folytonos 0-ban, ha $b = -1$. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} ax + b = a + b = f(1)$, míg $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x} = 1$, így $a + b = 1$, ami $b = -1$ mellett akkor és csak akkor teljesül, ha $a = 2$. Tehát f akkor és csak akkor folytonos mindenütt, ha $a = 2$ és $b = -1$.

4. *Van-e valós megoldása az alábbi egyenleteknek?*

a) $\sin x - x + 1 = 0$

b) $x^5 - 18x + 2 = 0$

Megoldás:

a) Igen, mert $f(x) = \sin x - x + 1$ folytonos függvény (folytonosak összege), és $x = 3$-ban $f(3) = \sin 3 - 3 + 1 \leq 1 - 3 + 1 = -1 < 0$, míg $f(0) = \sin 0 - 0 + 1 = 1 > 0$, így a Bolzano-tétel szerint f-nek van gyöke a $(0, 3)$-ban.

b) Igen, mert az $f(x) = x^5 - 18x + 2$ függvény polinom, így folytonos, és $f(0) = 2 > 0$, $f(1) = -15 < 0$, tehát a $(0, 1)$ valamely pontjában a 0-t is felveszi a függvény.

5. *Felveszi-e az $f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin \pi x + 3$ függvény a $\frac{7}{3}$ értéket a $[-2, 2]$ intervallumban?*

Megoldás: A függvény folytonos, $f(-2) = 1$, $f(2) = 5$, és $1 < \frac{7}{3} < 5$, tehát a Bolzano–Darboux-tétel szerint van olyan $c \in [-2, 2]$, ahol $f(c) = \frac{7}{3}$.

6. *Osszuk el az alábbi $P(x)$ polinomokat a megadott $Q(x)$ polinommal maradékosan!*

a) $P(x) = x^6 - x^5 + x^2 + 2x + 3$, $Q(x) = x^3 - x^2$

b) $P(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, $Q(x) = x^4 + x^2 + 1$

Megoldás: a)

$$\begin{array}{rrrrrrcccc} (& x^6 & -x^5 & +x^2 & +2x & +3) & : & (x^3 - x^2) & = & x^3 \\ -(& x^6 & -x^5 &) & & & & & & \\ \hline & & & x^2 & +2x & +3 & & & & \end{array}$$

Tehát $x^6 - x^5 + x^2 + 2x + 3 = x^3(x^3 - x^2) + (x^2 + 2x + 3)$.

b)

$$\begin{array}{rrrrrrrcccc} (& x^5 & -x^4 & +x^3 & -x^2 & +x & -1) & : & (x^4 + x^2 + 1) & = & x \quad -1 \\ -(& x^5 & & +x^3 & & +x &) & & & & \\ \hline & & -x^4 & & -x^2 & & -1 & & & & \\ -(& & -x^4 & & -x^2 & & -1 &) & & & \\ \hline & & & & & & 0 & & & & \end{array}$$

Tehát $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^4 + x^2 + 1)$.

7. *A Horner-módszer segítségével döntsük el, hogy a megadott c érték gyöke-e a $P(x)$ polinomnak, és ha igen, akkor emeljük ki belőle az $(x - c)$ gyöktényezőt!*

a) $P(x) = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$, $c = -3$ *b)* $P(x) = x^9 - 5x^7 + 3x^5 + 3x^3 + 4x$, $c = -2$

Megoldás: a)

	1	2	0	2	1
-3	1	-1	3	-7	22

Az osztás maradéka (azaz a polinom helyettesítési értéke) 22, tehát -3 nem gyöke a polinomnak.

b)

	1	0	-5	0	3	0	3	0	4	0
-2	1	-2	-1	2	-1	2	-1	2	0	0

A -2 gyöke a polinomnak, $P(x) = (x + 2)(x^8 - 2x^7 - x^6 + 2x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x)$.

8. *Határozzuk meg az alábbi egész együtthatós polinomok racionális gyökeit, és bontsuk fel a polinomot gyöktényezők szorzatára $\mathbb{C}$ fölött!*

a) $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 + 2$ *b)* $g(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 5$

Megoldás: a) A racionális gyökteszt szerint az f minden racionális gyöke $\frac{p}{q}$ alakba írható, ahol p osztója 2-nek, és q osztója 1-nek, vagyis $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2$.

	1	1	-1	-3	0	2
1	1	2	1	-2	-2	0
1	1	3	4	2	0	
-1	1	2	2	0		

Harmadszor már nem próbáltuk behelyettesíteni az 1-et, mert a hányadosnak csupa pozitív együtthatója van, tehát nyilván nem lehet pozitív gyöke. Az eddigiek alapján $f(x) = (x-1)^2(x+1)(x^2+2x+2)$, és a másodfokú polinom gyökeit már a megoldóképlettel is megkereshetjük: $\dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$. Tehát az $f(x)$ gyöktényezős felbontása:
$f(x) = (x-1)^2(x+1)(x-(-1+i))(x-(-1-i))$.

b) A racionális gyökteszt alapján a lehetséges racionális gyökök $\pm 1, \pm 5, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$. Ezeket sorra behelyettesítve azt látjuk, hogy a $-\frac{1}{2}$ gyöke a polinomnak, ezért Horner-módszerrel kiemeljük az $(x+\frac{1}{2})$ gyöktényezőt.

	2	5	-8	-5
$-\frac{1}{2}$	2	4	-10	0

Tehát $g(x) = (x+\frac{1}{2})(2x^2+4x-10) = 2(x+\frac{1}{2})(x^2+2x-5)$. A másodfokú tényező gyökei $\dfrac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$, ezért a $g(x)$ gyöktényezős felbontása:
$g(x) = 2(x+\frac{1}{2})(x-(-1+\sqrt{6}))(x-(-1-\sqrt{6}))$.