1. *Definíció alapján számítsuk ki az alábbi differenciálhányadosokat (amennyiben léteznek a megadott pontban)!*

a) $f(x) = 2x^3 - 1,\ \ f'(2)$ *b)* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sin x}, & \textit{ha } x \neq k\pi \\ x^2 & \textit{különben} \end{cases},\ \ f'(0)$

c) $f(x) = |x|^3,\ \ f'(0),\ f''(0),\ f'''(0)$

Megoldás: a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2(2+h)^3 - 1) - (2\cdot 2^3 - 1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{24h + 12h^2 + 2h^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 24 + 12h + 2h^2 = 24.$

b) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{\sin x} - 0^2}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1.$

c) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|^3 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cdot|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x|x| = 0$, és $x < 0$-ra $f'(x) = (-x^3)' = -3x^2$, míg $x > 0$-ra $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$. Így

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 3x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}.$$

Bár a feladat csak a 0-ban kérdezte a deriváltat, a második derivált kiszámításához a 0 környezetében is ismernünk kell az f'-t.
$f''_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-3x^2 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} -3x = 0$ az f' bal oldali deriváltja a 0-ban, és $f''_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x^2 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} 3x = 0$ a jobb oldali, így $f''(0) = 0$, és a többi helyen megkapjuk a deriváltat a $-3x^2$, illetve $3x^2$ deriválásával:

$$f''(x) = \begin{cases} -6x, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 6x, & \text{ha } x > 0 \end{cases}.$$

Végül $f'''_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-6x}{x} = -6$, és $f'''_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{6x}{x} = 6$ különbözők, így $f'''(0)$ nem létezik.

2. *Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját!*

a) $3x^8 - 8\sqrt{x}$ *b)* $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ *c)* $\frac{x^5+1}{2x^2+x}$ *d)* $\operatorname{tg} x$
e) $\sin(x^2+3)$ *f)* $\operatorname{tg}^3 x$ *g)* $\frac{1+\sin x}{x}$ *h)* $(x+2)\sqrt{x^3}$
i) $(x + \operatorname{tg} x)^{10}$ *j)* $\sin(\cos x^2)$ *k)* $\frac{x}{e^{2x}}$ *l)* $\ln(x^2+1)$
m) $2^{1/x}$ *n)* $\ln\left(\frac{x^5 \sin x}{x+1}\right)$ *o)* x^{2x+1} *p)* $(*)\ \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$
q) $\ln \operatorname{arctg} x$ *r)* $(*)\ \arcsin\sin x$ *s)* $\cos\arcsin x$ *t)* $\operatorname{ch} x$

Megoldás: a) $24x^7 - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ b) $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$

c) $\dfrac{5x^4(2x^2+x) - (x^5+1)(4x+1)}{(2x^2+x)^2} = \dfrac{6x^6 + 4x^5 - 4x - 1}{(2x^2+x)^2}$

d) $\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

e) $2x\cos(x^2+3)$ f) $3(\operatorname{tg}^2 x)\dfrac{1}{\cos^2 x}$ g) $\dfrac{(\cos x)x - (1+\sin x)}{x^2}$

h) $((x+2)\sqrt{x^3})' = (x^{5/2} + 2x^{3/2})' = \frac{5}{2}x^{3/2} + 3x^{1/2} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}$

i) $10(x+\operatorname{tg} x)^9(1+\frac{1}{\cos^2 x})$ j) $(\cos(\cos x^2))(-\sin x^2)(2x)$

k) $\left(\dfrac{x}{e^{2x}}\right)' = (xe^{-2x})' = e^{-2x} + xe^{-2x}\cdot(-2) = (1-2x)e^{-2x}$

l) $\dfrac{2x}{x^2+1}$ m) $2^{1/x}(\ln 2)\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)$

n) $\left(\ln\Big(\dfrac{x^5\sin x}{x+1}\Big)\right)' = (5\ln x + \ln(\sin x) - \ln(x+1))' = \dfrac{5}{x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{1}{x+1}.$

Ez a szétbontás ugyan csak akkor működik, ha nemcsak az egész hányados pozitív (hogy a logaritmus egyáltalán értelmezve legyen), hanem minden egyes szorzó-, illetve osztótényező is pozitív. De ez a plusz feltétel kikerülhető, ha figyelembe vesszük, hogy az összetett függvény értelmezési tartományán a tört megegyezik az abszolút értékével, így

$$\left(\ln\Big(\frac{x^5\sin x}{x+1}\Big)\right)' = \left(\ln\Big|\frac{x^5\sin x}{x+1}\Big|\right)' = \left(\ln\frac{|x|^5|\sin x|}{|x+1|}\right)' =$$
$$(5\ln|x| + \ln|\sin x| - \ln|x+1|)' = \frac{5}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x+1}.$$

o) $(x^{2x+1})' = \left((e^{\ln x})^{2x+1}\right)' = (e^{(2x+1)\ln x})' = e^{(2x+1)\ln x}\left(2\ln x + \frac{2x+1}{x}\right) =$
$= x^{2x+1}\left(2\ln x + \frac{2x+1}{x}\right) = 2x^{2x+1}\ln x + (2x+1)x^{2x}$

p) $\left(\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}}\cdot\dfrac{2-2x^2}{1+x^2} =$

$\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\cdot\dfrac{2-2x^2}{1+x^2} = \dfrac{1}{|1-x^2|}\cdot\dfrac{2-2x^2}{1+x^2}$. Ez ±1-ben nincs értelmezve, és $|x|>1$ esetén $\dfrac{-2}{1+x^2}$-tel, $|x|<1$ esetén pedig $\dfrac{2}{1+x^2}$-tel egyenlő. Tehát a deriváltfüggvénynek az egyoldali limeszei ±1-ben különbözők (egyik oldalról -1, másikról 1), és a Darboux-tétel miatt a deriváltfüggvénynek nem lehet ugrása, tehát f nem differenciálható ±1-ben.

q) $\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$

r) $\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^2 x}}\cdot\cos x = \dfrac{\cos x}{|\cos x|}$,
Ez a fv. nincs értelmezve, ha $\cos x = 0$, azaz ha $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$, és ezeken a helyeken a két oldalról két különböző, véges határértéke van, ezért a Darboux-tétel miatt az $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ pontokban a függvény nem differenciálható. Ha $x\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$, akkor a derivált 1, ha $x\in(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi$, akkor a derivált -1. (Ld. még a 7/4. feladatot.)

s) $-\sin(\arcsin x)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x\in(-1,1))$.

t) $(\operatorname{ch} x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$

3. *Adjuk meg az alábbi függvények adott pontbeli érintőjét!*

a) $f(x) = \sin\sqrt{x},\ x = \pi^2$ *b)* $f(x) = x^3 - 8x,\ x = 3$ *c)* $f(x) = \dfrac{x^2-6}{x},\ x = 5$

Megoldás: a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$, $f'(\pi^2) = -\dfrac{1}{2\pi}$, $f(\pi^2) = 0$, az érintő: $y = -\dfrac{1}{2\pi}(x - \pi^2)$, azaz $y = -\dfrac{1}{2\pi}x + \dfrac{\pi}{2}$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 8$, $f'(3) = 19$, $f(3) = 3$, az érintő: $y - 3 = 19(x-3)$, azaz $y = 19x - 54$.

c) $f(x) = x - \dfrac{6}{x}$, $f'(x) = 1 + \dfrac{6}{x^2}$, $f'(5) = \frac{31}{25}$, $f(5) = \frac{19}{5}$, az érintő: $y - \frac{19}{5} = \frac{31}{25}(x-5)$, azaz $y = \frac{31}{25}x - \frac{12}{5}$.

4. *Határozzuk meg azokat az x értékeket, ahol a* $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ *függvény grafikonjának vízszintes érintője van!*

Megoldás: Ha $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, akkor $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-2x}{2(x+1)^2\sqrt{x}} = \dfrac{1-x}{2(x+1)^2\sqrt{x}}$, és ez csak $x = 1$-ben 0, tehát itt van vízszintes érintője az f függvénynek.

5. *Határozzuk meg az alábbi implicit módon megadott $x \mapsto y(x)$ függvények deriváltjait.*

a) $y^2x + 3xy^3 - x = 3,\ y'(x) = ?$ *b)* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1,\ y'(2) = ?,\ y''(2) = ?$

Megoldás: a) Az egyenlet mindkét oldalát deriválva x szerint: $y^2 + 2xyy' + 3y^3 + 9xy^2y' - 1 = 0$, amiből $y'(2xy + 9xy^2) = 1 - y^2 - 3y^3$, így $y' = \dfrac{1 - y^2 - 3y^3}{2xy + 9xy^2}$.

b) $-\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y'}{y^2} = 0$, és $x = 2$-nél $y = 2$, így $-\frac{1}{4} - \frac{y'(2)}{4} = 0$, tehát $y'(2) = -1$. Ha még egyszer deriváljuk az egyenletet, $\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{2}{y^3}(y')^2 - \dfrac{1}{y^2}y'' = 0$. Ebbe behelyettesítve az $x = 2$, $y = 2$, $y' = -1$ értékeket azt kapjuk, hogy $\frac{2}{8} + \frac{2}{8} - \frac{1}{4}y''(2) = 0$, tehát $y''(2) = 2$. (Megjegyzés: Itt az y-t expliciten is ki tudjuk fejezni, és úgy deriválni.)

6. *Tegyük fel, hogy g az f függvény inverze, és tudjuk, hogy $f(3) = 1$ és $f'(3) = 5$. Melyik pontjában tudjuk megadni ennek alapján a g függvény deriváltját? Mi ennek a deriváltnak az értéke?*

Megoldás: $g(1) = 3$, és $g'(1) = 1/f'(g(1)) = 1/f'(3) = 1/5$.