1. *Az alábbi limeszek közül melyikeknél alkalmazható a l'Hospital-szabály? Számítsuk ki a határértékeket!*

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x}$ *c)* $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 e^x$ *d)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x$ *e)* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

Megoldás: a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2-1} \overset{L'H(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = \dfrac{1}{2}$

b) Erre nem alkalmazható a l'Hospital-szabály, mert a számláló 0-hoz, a nevező viszont 1-hez tart, de nincs is rá szükség: a limesz $\frac{0}{1} = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 e^x = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{e^{-x}} \overset{L'H(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x}{-e^{-x}} \overset{L'H(\frac{-\infty}{-\infty})}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2}{e^{-x}} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} \overset{L'H(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos x + x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{\sin x + x\cos x} \overset{L'H(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + x\cos x}{2\cos x - x\sin x} = \dfrac{0}{2} = 0$

e) $x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln x}$, és $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x} \overset{L'H(\frac{-\infty}{\infty})}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$, így $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.

2. *Mi az abszolút minimuma és maximuma az alábbi függvényeknek a megadott intervallumokon?*

a) $\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{3}x^2$ *a* $[-1, \sqrt{8}]$*-on*

b) $x^3 + 6x^2 - 15x + 3$ *a* $[-6, 6]$*-on*

Megoldás: a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{3}x^2$, $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}x^{-1/3}(1 - x^{4/3})$. f'-nek 0-helye ± 1-ben van, ebből az 1 van a $(-1, \sqrt{8})$ intervallumban, f' nem létezik a 0-ban. Így a szélsőértékek lehetséges helyei -1, 0, 1, $\sqrt{8}$. Itt az f értékei $\frac{2}{3}$, 0, $\frac{2}{3}$, illetve $-\frac{2}{3}$, így a maximum $\frac{2}{3}$, a minimum $-\frac{2}{3}$.

b) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$, $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$, ennek 0-helyei -5 és 1 (mindegyik a $(-6, 6)$ intervallumban), és f' mindenhol létezik. Tehát a lehetséges szélsőértékhelyek -6, -5, 1 és 6, az f értékei itt 93, 103, -5 és 345, így a minimum -5, a maximum 345.

3. *Írjuk fel az $f(x)$ függvény x_0 pont körüli másodrendű Taylor-polinomját, és ezt felhasználva adjunk becslést a megadott c számra.*

a) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 16$, $c = \sqrt[4]{18}$

b) $f(x) = x^5$, $x_0 = 1$, $c = 1{,}038^5$

Megoldás: a) $f(x) = x^{1/4}$, $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$, $f''(x) = -\frac{3}{16}x^{-7/4}$, $f(x_0) = f(16) = 2$, $f'(x_0) = f'(16) = \frac{1}{32}$, $f''(x_0) = f''(16) = -\frac{3}{2048}$,
$T_2(x) = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2$, $\sqrt[4]{18} = f(18) \approx T_2(18) = 2 + \frac{1}{16} - \frac{3}{1024} \approx 2{,}05957$

b) $f(x) = x^5$, $f'(x) = 5x^4$, , $f''(x) = 20x^3$, $f(x_0) = f(1) = 1$, $f'(x_0) = f'(1) = 5$, $f''(x_0) = f''(1) = 20$, $T_2(x) = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2$, $1{,}038^5 = f(1{,}038) \approx T_2(1{,}038) = 1 + 5 \cdot 0{,}038 + 10 \cdot 0{,}038^2 = 1{,}20444$.

4. *Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények hol monoton fogyók, illetve növők, és keressük meg a lokális szélsőértékeiket!*

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ *b)* $f(x) = \sqrt{x}e^{1/x}$ *c)* $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x$

Megoldás: a) Az f függvény mindenütt értelmezve van és folytonos. A deriváltja $f'(x) = \dfrac{(x^2+4)-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$, ami $x=\pm 2$-nél 0, $(-\infty,-2]$-n és $[2,+\infty)$-en negatív, $[-2,2]$-n pedig pozitív. Így f monoton növő a $[-2,2]$ intervallumon, monoton fogyó $(-\infty,-2]$-n és $[2,+\infty)$-en. Ebből következik, hogy -2-ben van lokális minimuma (értéke $-\frac{1}{4}$) és 2-ben lokális maximuma (értéke $\frac{1}{4}$).

b) Az f függvény értelmezési tartománya $(0,+\infty)$, és itt folytonos is. A deriváltja $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{1/x} - \sqrt{x}e^{1/x}\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-2}{2x\sqrt{x}}e^{1/x}$. Ez csak $x=2$-ben 0, előtte negatív, utána pozitív, így f-nek 2-ben lokális minimuma van, amelynek értéke $\sqrt{2e}$.

c) Az $f(x)$ függvény periodikus, 2π periódussal. Elég egyetlen periódust megvizsgálni. $f'(x) = 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x = 2(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2})\cos x$ nullhelyei a $[0,2\pi]$-ben $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$, és a perióduson:

$x:$	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f'		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			MIN		MAX		MIN		MAX		
$f:$			$-\frac{3}{4}$		$1-\sqrt{3}$		$-\frac{3}{4}$		$1+\sqrt{3}$		

0-ban, illetve 2π-ben nincs szélsőérték, mert a függvény előtte és utána is fogyó. Tehát a lokális minimumhelyek $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ és $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, a lokális maximumhelyek pedig $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ és $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

5. *A függvény menetének a vizsgálatából állapítsuk meg, hány valós gyöke van az* $f(x) = x^3-3x+5$ *polinomnak.*

Megoldás: Az $f'(x) = 3x^2-3$ függvény 0-helyei ± 1:

$x:$	$-\infty$		-1		1		∞
f'		$+$		$-$		$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f:$	$-\infty$		7		3		∞

Mivel a $(-\infty,-1]$, $[-1,1]$ és $[1,+\infty)$ intervallumokon szigorúan monoton az f, és a második két intervallum mindkét "végén" pozitív, csak a $(-\infty,-1]$ intervallumon van egyetlen gyöke a polinomnak.

6. *Bizonyítsuk be, hogy* $\operatorname{tg} x > x$, *ha* $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Megoldás: Legyen $f(x) = \operatorname{tg} x - x$. Ez a függvény folytonos a $[0,\frac{\pi}{2})$ intervallumon, és deriváltja $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$ az intervallum belsejében (ugyanis ott $\cos^2 x < 1$), így $f(x)$ szigorúan monoton növő a $[0,\frac{\pi}{2})$ intervallumon. Mivel $f(0)=0$, a $(0,\frac{\pi}{2})$ nyílt intervallumon $f(x)>0$, azaz $\operatorname{tg} x > x$.

7. *Adott térfogatú hengerek közül melyiknek legkisebb a felszíne?*

Megoldás: Ha r a henger alapjának sugara, m pedig a henger magassága, akkor a henger térfogata $V = \pi m r^2$, a felszíne pedig $A = 2\pi r^2 + 2\pi r m = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$. Ezért az $f(r) =$

$2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$ függvény abszolút minimumát kell megkeresni a $(0, \infty)$ intervallumon. $f'(r) = 4\pi r - 2Vr^{-2} = r^{-2}(4\pi r^3 - 2V) = 0$, ha $V = 2\pi r^3$, azaz $m = 2r$, és f' előtte negatív, utána pozitív, így itt $f(r)$ felveszi az abszolút minimumát. A felszín eszerint akkor minimális, ha a henger magassága megegyezik az alapjának az átmérőjével.

8. *Hol vannak lokális szélsőértékei, hol konvexek, illetve konkávak az alábbi függvények?*

a) $(x^2 - 2x)e^x$ *b)* $\arcsin x^2$

Megoldás: a) Ha $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$, akkor $f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x = (x^2-2)e^x$, és $f''(x) = 2xe^x + (x^2-2)e^x = (x^2+2x-2)e^x$. Az $f'(x)$ függvény 0-helyei $\pm\sqrt{2}$, az $f''(x)$ függvényé $-1 \pm \sqrt{3}$. A $(-\infty, -1-\sqrt{3})$ és $(-1+\sqrt{3}, +\infty)$ intervallumokon $f''(x) > 0$, így $f(x)$ itt konvex, a $(-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$ intervallumon pedig $f''(x) < 0$, és $f(x)$ konkáv. Szélsőértéke $f(x)$-nek az $f'(x)$ 0-helyein lehet, azaz $\pm\sqrt{2}$-ben, és ezek közül $-\sqrt{2}$-ben lokális maximuma van f-nek, mert $f''(-\sqrt{2}) < 0$, és $\sqrt{2}$-ben lokális minimuma van f-nek, mert $f''(\sqrt{2}) > 0$.

b) Ha $f(x) = \arcsin x^2$, akkor

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}, \text{ és}$$

$$f''(x) = (2x(1-x^4)^{-1/2})' = 2(1-x^4)^{-1/2} + 2x(1-x^4)^{-3/2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-4x^3) = \frac{2-2x^4+4x^4}{(1-x^4)^{3/2}} = \frac{2+2x^4}{(1-x^4)^{3/2}}.$$

Az $f''(x)$ függvény pozitív az f teljes értelmezési tartományának belsejében, $(-1, 1)$-en, tehát a folytonos f függvény konvex a $[-1, 1]$ intervallumon. $f'(x)$ csak 0-ban vesz fel 0-t (és f' létezik az f értelmezési tartományának belsejében), tehát csak itt lehet szélsőértéke az f függvénynek, és mivel $f''(0) > 0$, f-nek itt lokális minimuma van.

9. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken!*

a) $\sqrt[3]{1-x^3}$ *b)* $\dfrac{\ln x}{x}$ *c)* $\mathrm{arctg}(1 + \frac{1}{x})$

Megoldás: a) Ha $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$, akkor $D(f) = \mathbb{R}$, és itt folytonos is a függvény. Nem páros és nem páratlan, tengelymetszetei: $(0, 1)$ és $(1, 0)$. Függőleges aszimptotája nem lehet, ∞-ben: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3} - 1} = -1$, és $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + x = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{1-x^3} + x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-x^3+x^3}{(1-x^3)^{2/3} - (1-x^3)^{1/3}x + x^2} = 0$ (az $a + b = \dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$ összefüggést használtuk, és a kapott tört nevezőjében már minden tag $+\infty$-hez tart). Tehát f ferde aszimptotája $y = -x$, és ugyanez az egyenes $-\infty$-ben is aszimptotája.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1-x^3)^{-2/3} \cdot (-3x^2) = \frac{-x^2}{(1-x^3)^{2/3}}$$

$$f''(x) = -2x \cdot (1-x^3)^{-2/3} - x^2 \cdot (-\frac{2}{3})(1-x^3)^{-5/3} \cdot (-3x^2) = \frac{-2x}{(1-x^3)^{5/3}}$$

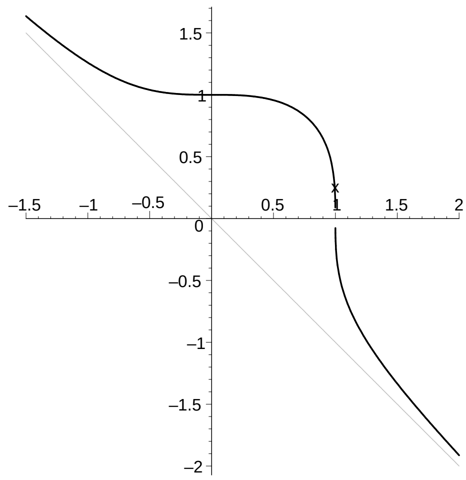
$f'(x)$ az $x = 0$-ban 0, és $x = 1$-ben nincs értelmezve, $f''(x)$ ugyanígy.

$x: \quad -\infty \qquad 0 \qquad 1 \qquad \infty$

f'	$-$	$-$	$-$
f''	$+$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
f''	$\cup$	$\cap$	$\cup$

INFL *INFL*

$f: \quad \infty \qquad 1 \qquad 0 \qquad -\infty$



Bár a függvény $x = 1$-ben nem differenciálható, mégis van inflexiós pontja, mert konkávból konvexbe vált, és van (függőleges) érintője. $R(f) = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$-re $D(f) = (0, +\infty)$, f folytonos ezen a tartományon, nem páros és nem páratlan, és az $(1, 0)$ az egyetlen tengelymetszete. Függőleges aszimptotája csak 0-ban lehet, és ott van is, mert $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$. A ∞-ben $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, tehát $y = 0$ vízszintes aszimptota.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - (\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x}x^{-2} + (1 - \ln x)(-2)x^{-3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

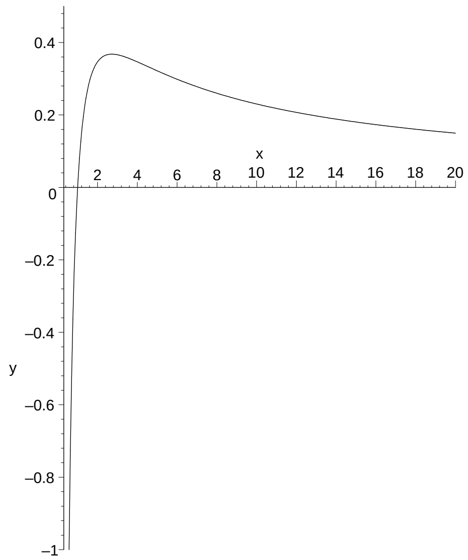
$f'(x)$ az $\ln x = 1$, azaz $x = e$ helyen 0, és az egész $D(f)$-en értelmezve van. $f''(x)$ az $\ln x = \frac{3}{2}$, azaz $x = \sqrt{e^3}$ helyen 0, és $D(f)$-en értelmezve van.

$x: \quad 0 \qquad e \qquad \sqrt{e^3} \qquad \infty$

f'	$+$	$-$	$-$
f''	$-$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
f''	$\cap$	$\cap$	$\cup$

MAX *INFL*

$f: \quad -\infty \qquad \frac{1}{e} \qquad \frac{3}{2\sqrt{e^3}} \qquad 0$



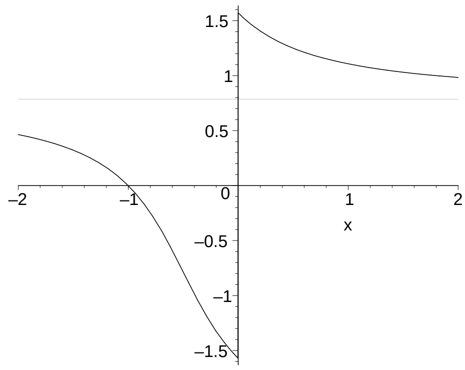
Az ábra alapján $R(f) = (-\infty, \frac{1}{e})$.

c) $f(x) = \operatorname{arctg}(1 + \frac{1}{x})$-re $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mert arctg mindenhol értelmezve van. A függvény nem páros és nem páratlan, a 0 kivételével mindenütt folytonos, és tengelymetszete csak a $(-1, 0)$ pontban van. Függőleges aszimptotája csak $x = 0$-ban lehet, de: $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}(1+\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$, és $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}(1+\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$, tehát f-nek nincs függőleges aszimptotája. ∞-ben $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(1+\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{4}$, tehát az $y=\frac{\pi}{4}$ egyenes vízszintes aszimptota.

$$f'(x) = \frac{1}{(1+\frac{1}{x})^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{2x^2+2x+1}$$
$$f''(x) = \frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2}$$

Az f' függvény mindig negatív, $f''(x)=0$ teljesül $x=-\frac{1}{2}$-re. Ez előtt negatív, ez után pozitív az $f''(x)$ értéke.

x : $-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	∞
f'	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	$+$	$+$
f''	$\searrow$ $\cap$	$\searrow$ $\cup$	$\searrow$ $\cup$
	$INFL$		
f : $\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$



$R(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.