11. feladatsor - Megoldások
Matematika A1

1. Számítsuk ki az $f(x) = x + 1$ függvényhez, a $[0, 1]$ intervallum $\Phi = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ felosztásához és az $\mathbf{c} = (\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5})$ reprezentánsrendszerhez tartozó integrálközelítő összeget!

Megoldás: $I_{\Phi,\mathbf{c}} = \left(\frac{1}{4}+1\right)\left(\frac{1}{3}-0\right) + \left(\frac{2}{5}+1\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}+1\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{5}+1\right)\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{91}{60}$

2. Keressük meg azokat a c számokat, amelyek kielégítik a megadott függvényre és intervallumra vonatkozó integrál-középértéktételt!

a) $f(x) = 3x^2 \qquad [-4, -1]$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \qquad [0, \frac{\pi}{4}]$

Megoldás: Mindkét részben olyan c számot keresünk, amelyre $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

a) $f(c) = 3c^2 = \dfrac{1}{-1-(-4)}\displaystyle\int_{-4}^{-1} 3x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-4}^{-1} = \frac{1}{3}(-1-(-64)) = 21 \Longrightarrow c^2 = 7 \Longrightarrow c = \pm\sqrt{7}$
$\Longrightarrow$ Ezek közül $c = -\sqrt{7}$ esik a szóban forgó intervallumba.

b) $f(c) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\frac{\pi}{4}-0}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\left[\operatorname{tg} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}(1-0) = \frac{4}{\pi} \Longrightarrow \cos^2 c = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \cos c = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Longrightarrow$ Most olyan c kell, ami a $[0, \frac{\pi}{4}]$ intervallumban van, azaz amire $1 \geq \cos c \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, így $c = \arccos\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ megfelel.

3. a) Legyen $f \geq 0$ differenciálható konvex függvény $[a, b]$-n. Bizonyítsuk be geometriailag, hogy
$(b-a)\cdot f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}$.
(Minek a területe a bal-, illetve jobb oldali kifejezés?)

b) Az a) rész segítségével adjunk alsó és felső becslést az $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$ integrálra!

Megoldás:

- A jobb oldali kifejezés annak a trapéznak a területe, aminek oldalai az x tengely, az $x = a$ és $x = b$ egyenesek, és a grafikon a-hoz és b-hez tartozó pontjait összekötő egyenes. Mivel f konvex, ezért ez nagyobb vagy egyenlő az f alatti területnél. A bal oldali kifejezés pedig annak a trapéznak a területe, amelynek oldalai az x tengely, az $x = a$ és $x = b$ egyenesek, és a grafikonhoz húzott érintő egyenese az $\dfrac{a+b}{2}$ pontban, ugyanis ekkor a trapéz középvonalának hossza éppen $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$. Mivel f kovex, a függvénygörbe az érintő fölött halad (ezt abból láthatjuk, hogy az érintési pontból húzott húr meredeksége megegyezik egy közbülső pontban vett érintő meredekségével, és a deriváltfüggvény monoton növő a konvexitás miatt, így a húr, és azzal együtt a görbe másik pontja is az érintő fölött van). Ezért ez a trapéz benne van az f grafikonja és az x tengely közötti tartományban, így a területe kisebb vagy egyenlő az f alatti területnél.
- Az a) rész képletében most $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$, így az alsó és felső becslések:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x \geq (2-1)\cdot f\left(\frac{1+2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{3}{2})^3}} \approx 0,48, \text{ és}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x \leq (2-1)\cdot\frac{f(1)+f(2)}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+1^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+2^3}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{6} \approx 0,52$$

4. (Gy) Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

a) $\displaystyle\int_1^4 2x - \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-1}^2 |3x(x-2)|\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \arccos x\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x}e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ (!)

f) $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$

Megoldás:

a) $\int\limits_1^4 2x - \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 2x - x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^4 = (16 + \frac{2}{\sqrt{16}}) - (1 + \frac{2}{\sqrt{1}}) = 13,5$

b) $e^x = u \iff x = \ln u$ helyettesítéssel $\mathrm{d}x = \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$, így $\int\limits_0^2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{e^0}^{e^2} \frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = *$

$\frac{u-1}{(u+1)u} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u} = \frac{Au + Bu + B}{(u+1)u} \Longrightarrow \begin{matrix} u: & 1 = A + B \\ 1: & -1 = B \end{matrix} \Longrightarrow A = 2,\, B = -1 * = \int_1^{e^2} \frac{2}{u+1} - \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \big[2\ln|u+1| - \ln|u|\big]_1^{e^2} = 2\ln(e^2+1) - 2 - 2\ln 2$

c) Az integrálási tartományt szét kell választani aszerint, hogy az integrandusban az abszolút értéken belül milyen előjelű érték van. $3x(x-2) \geq 0 \iff x \geq 2$ vagy $x \leq 0$, így $\int\limits_{-1}^2 |3x(x-2)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 |3x(x-2)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 |3x(x-2)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 3x(x-2)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 -3x(x-2)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 3x^2 - 6x\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 -3x^2 + 6x\,\mathrm{d}x = \big[x^3 - 3x^2\big]_{-1}^0 + \big[-x^3 + 3x^2\big]_0^2 = \{0 - (-4)\} + \{4 - 0\} = 8.$

d) Parciálisan integrálva: $\int\limits_{-1}^1 1 \cdot \arccos x\,\mathrm{d}x = \big[x \cdot \arccos x\big]_{-1}^1 - \int\limits_{-1}^1 x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x =$

$= (1 \cdot \arccos 1 - (-1)\arccos(-1)) - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 (-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$

$= 0 + \pi - \frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{-1}^1 = \pi - (0 - 0) = \pi$

e) $\int\limits_{-1}^1 \sqrt[3]{x}e^{x^2}\,\mathrm{d}x = 0$, hiszen az integrandus páratlan függvény, és így a 0-ra szimmetrikus intervallumon 0 az integrálja (mert grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra).

f) $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, így $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x =$
(szétválasztva aszerint, hogy az abszolút értéken beül pozitív vagy negatív érték van)
$= \int\limits_{-\pi/3}^0 \sqrt{2}(-\sin\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_{-\pi/3}^0 + \left[-\sqrt{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi/2} =$
$2\sqrt{2}\left\{\cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} + 2\sqrt{2}\left\{-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos 0\right\} = 2\sqrt{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1) =$
$4\sqrt{2} - \sqrt{6} - 2$

5. (Gy) Milyen alakú elemi törtfüggvényekre lehet felbontani az alábbi racionális törtfüggvényeket? (Nem kell kiszámítani az együtthatókat!)

a) $\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x-3)}$ b) $\frac{x+2}{x(x^2+2x+2)^2}$ c) $\frac{1}{(x^2-9)^2}$

Megoldás:

a) $\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3}$

b) $\frac{x+2}{x(x^2+2x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2}$

c) $\frac{1}{(x^2-9)^2} = \frac{1}{(x-3)^2(x+3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2}$

6. (Gy) Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{2x^2+x-3}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{5x^2+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+1}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-1/2}^{3/2} \frac{1}{4x^2+4x+17}\,\mathrm{d}x$

Megoldás:

a) $\displaystyle \frac{2x+4}{2x^2+x-3} = \frac{x+2}{(x-1)(x+\frac{3}{2})} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+\frac{3}{2}} = \frac{A(x+\frac{3}{2})+B(x-1)}{(x-1)(x+\frac{3}{2})} \implies \begin{array}{c} 1 = A+B \\ 2 = \frac{3}{2}A - B \end{array} \implies$ $A = \frac{6}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$

$$\int \frac{2x+4}{2x^2+x-3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{6}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\ln\left|x+\frac{3}{2}\right| + C$$

b) $\displaystyle \frac{5x^2+1}{x^3+x} = \frac{5x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$

$$\implies \begin{array}{c} 5 = A+B \\ 0 = C \\ 1 = A \end{array} \implies A=1,\ B=4,\ C=0$$

$$\int_1^2 \frac{5x^2+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln|x| + 2\ln|x^2+1|\Big]_1^2 = (\ln 2 + 2\ln 5) - (\ln 1 + 2\ln 2) = \ln\frac{25}{2}$$

c) $\displaystyle \frac{x^3-2x+1}{(x+1)^3} = \frac{x^3-2x+1}{x^3+3x^2+3x+1} = \frac{(x^3+3x^2+3x+1)-3x^2-5x}{x^3+3x^2+3x+1} =$

$$1 + \frac{-3x^2-5x}{(x+1)^3} = 1 + \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} = 1 + \frac{A(x+1)^2+B(x+1)+C}{(x+1)^3}$$

$$\implies \begin{array}{c} -3 = A \\ -5 = 2A+B \\ 0 = A+B+C \end{array} \implies A=-3,\ B=1,\ C=2$$

$$\int \frac{x^3-2x+1}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \int 1 - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = x - 3\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + C.$$

d) $4x^2+4x+17 = (2x+1)^2+16 = 16\left(\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2+1\right)$

$$\int_{-1/2}^{3/2} \frac{1}{4x^2+4x+17}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\int_{-1/2}^{3/2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}}\right]_{-1/2}^{3/2} = \frac{1}{8}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{32}$$

(Gy) - gyakorló feladatok, (*) - gondolkodtató feladatok