12. gyakorlat
Matematika A1

1. *Számítsuk ki a következő integrálokat a megfelelő helyettesítéssel!*

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$ *b)* $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ *c)* $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{15+2x-x^2}\,\mathrm{d}x$ *d)* $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

Megoldás: a) Az egyik lehetőség az $x = \operatorname{ch} u$, $\mathrm{d}x = \operatorname{sh} u\,\mathrm{d}u$ helyettesítés, amiből a $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ch}^3 u}{\operatorname{sh} u}\operatorname{sh} u\,\mathrm{d}u = \int \operatorname{ch}^3 u\,\mathrm{d}u = \int (1+\operatorname{sh}^2 x)\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u = \int \operatorname{ch} u + \operatorname{sh}^2 u \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u =$
$\displaystyle\operatorname{sh} u + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 u + C = (1+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^2 u)\operatorname{sh} u + C = (1+\frac{1}{3}(x^2-1))\sqrt{x^2-1} + C =$
$\displaystyle= \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{x^2-1}+C.$

De egyszerűbb, ha az $x^2-1=u$, $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ helyettesítést választjuk (minthogy a $2x$ kiemelése után maradó függvény szép kifejezése (x^2-1)-nek). Ekkor a következő integrált kapjuk:
$\displaystyle\int \frac{u+1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{2}u^{1/2} + \frac{1}{2}u^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^{3/2} + u^{1/2} + C = (\frac{1}{3}u+1)\sqrt{u} + C =$
$\displaystyle(\frac{1}{3}(x^2-1)+1)\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{x^2-1}+C.$

b) A $\sqrt{1+x^2}$ kifejezés miatt az $x = \operatorname{sh} u$, $\mathrm{d}x = \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u$ fordított helyettesítést alkalmazzuk:
$\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u}\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u = \int \frac{\operatorname{ch} u}{e^u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^u+e^{-u}}{e^u}\,\mathrm{d}u =$
$\displaystyle\int \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}e^{-2u} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arsh} x - \frac{1}{4}e^{-2\operatorname{arsh} x} + C$
Az $\operatorname{arsh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ alakot használva ez tovább egyszerűsíthető:
$\displaystyle\frac{1}{2}\operatorname{arsh} x - \frac{1}{4(x+\sqrt{1+x^2})^2} + C.$

2. *Számítsuk ki a két görbe közötti területet:*

a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ *és* $x+y=1$ *b)* $y=x^2$ *és* $y=2-x^2$

Megoldás: a) A két görbe explicit alakban $y=(1-\sqrt{x})^2 = 1+x-2\sqrt{x}$ és $y=1-x$. A metszéspontjaik $1+x-2\sqrt{x} = 1-x \Rightarrow x=\sqrt{x} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow$ $x=0,1$-nél vannak. Így a tartományt a 0 és 1 fölötti metszéspontok közötti görbeívek határolják , és a területe
$\displaystyle\left|\int_0^1 1+x-2\sqrt{x}-1+x\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^1 2x-2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left[x^2-\frac{4}{3}x^{3/2}\right]_0^1\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}.$

b) A két görbe metszéspontjai az $x^2=2-x^2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$ helyeken vannak. Így a terület $\displaystyle\left|\int_{-1}^1 x^2-(2-x^2)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{-1}^1 2x^2-2\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left[\frac{2}{3}x^3-2x\right]_{-1}^1\right| = \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{8}{3}.$

3. *Számítsuk ki a következő improprius integrálokat!*

a) $\displaystyle\int_0^\infty x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ *b)* $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$ *c)* $\displaystyle\int_{-4}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x$

Megoldás: a) $u=x^2$, $du = 2x\,\mathrm{d}x$ helyettesítéssel: $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}u\,\underline{e^{-u}}\,\mathrm{d}u =$
$\displaystyle\frac{1}{2}u(-e^{-u}) - \int\frac{1}{2}(-e^{-u})\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}(u+1)e^{-u}+C = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}+C$ (az aláhúzás

a parciális integrálásnál azt jelzi, hogy melyik tényezőt fogjuk deriválni), és ebből az improprius integrál $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}\right]_0^b = \frac{1}{2} - \lim_{b\to\infty}\frac{b^2+1}{2e^{b^2}} =$ $\frac{1}{2} - \lim_{b\to\infty}\frac{2b}{4be^{b^2}} = \frac{1}{2} - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2e^{b^2}} = \frac{1}{2}$.

b) Az integrálandó függvény $x \to 2^-$ esetén nem korlátos, így az integrál

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 2^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 2^-}\int_0^b \frac{1}{2\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{b\to 2^-}\left[\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot \arcsin\tfrac{x}{2}\right]_0^b = \lim_{b\to 2^-}\arcsin\tfrac{b}{2} = \tfrac{\pi}{2}$$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ 0-nál nem korlátos, ezért az integrált két részre kell vágni, és csak akkor konvergens, ha a kapott két improprius integrál mindegyike konvergens.

$$\int_{-4}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0^-}\int_{-4}^b \frac{1}{\sqrt{-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0^-}\int_{-4}^b \sqrt{-x}^{-1/2}\,\mathrm{d}x =$$

$= \lim_{b\to 0^-} 2\cdot(-1)\sqrt{-x}1/2\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 0^-}\left[-2\sqrt{-x}\right]_{-4}^b = \lim_{b\to 0^-} -2\sqrt{-b} + 2\sqrt{4} = 4$, és

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 1}\int a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 1}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 1} 2 - 2\sqrt{a} = 2$, így

$$\int_{-4}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x = 6.$$

4. *Döntsük el (ha szükséges, egy másik integrállal való összehasonlítva), hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e!*

a) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4-1}}\,\mathrm{d}x$ *b)* $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^2-x}\,\mathrm{d}x$ *c)* $\displaystyle\int_0^1 \ln^2 x\,\mathrm{d}x$

Megoldás: a) $[2,\infty)$-en $x^4-1 \geq \frac{1}{2}x^4$, így $0 < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4-1}} \leq \frac{\sqrt[3]{2}}{x^{4/3}}$, és az utóbbinak a $[2,\infty)$-en vett integrálja konvergens, ezért az eredeti integrál is konvergens.

b) $\left|\frac{\sin^3 x}{x^2-x}\right| \leq \frac{1}{x^2-x} \leq \frac{2}{x^2}$, mert $|\sin^3 x| \leq 1$, és $x^2 \leq 2x^2-2x$, azaz $2x \leq x^2$ a $[2,\infty)$-en. Viszont $\int_2^{\infty}\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konvergens, tehát $\int_2^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^2-x}\,\mathrm{d}x$ is konvergens.

c) $\int \ln^2 x\,dx = \int 1\cdot\underline{\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - \int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - \int 2\cdot\underline{\ln x}\,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2x\ln x + \int 2\,\mathrm{d}x = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$. Az $\ln^2 x$ függvény nem korlátos, ha $x\to 0^+$, tehát $\int_0^1 \ln^2 x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}\left[x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+} 2 - a(\ln^2 a - 2\ln a + 2) =$ 2, mert $\lim_{a\to 0^+} a(\ln^2 a - 2\ln a + 2) = \lim_{a\to 0^+}\frac{\ln^2 a - 2\ln a + 2}{1/a} \overset{L'H(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{a\to 0^+}\frac{2\frac{\ln a}{a} - \frac{2}{a}}{-1/a^2} =$ $\lim_{a\to 0^+}\frac{2\ln a - 2}{-1/a} \underset{L'H(\frac{-\infty}{-\infty})}{=} \lim_{a\to 0^+}\frac{2/a}{1/a^2} = \lim_{a\to 0^+} 2a = 0$. Tehát az integrál konvergens.

5. *Számítsuk ki a következő görbék ívhosszát az adott intervallum fölött!*

a) $y = \frac{1}{3}(2x)^{3/2}$, $[0,4]$ *b)* $y = \operatorname{ch} x$, $[0,3]$

Megoldás: a) $y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2x)^{1/2}\cdot 2 = \sqrt{2x}$, így az ívhossz

$$\int_0^4 \sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(1+2x)^{3/2}\cdot\frac{1}{2}\right]_0^4 = \frac{1}{3}(3^3-1) = \frac{26}{3}.$$

b) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, így az ívhossz $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \Big[\operatorname{sh} x\Big]_0^3 = \operatorname{sh} 3.$

6. *Számítsuk ki az annak a forgástestnek a térfogatát és felszínét, amelyet a megadott görbedarab x, illetve y tengely körüli forgatásával kapunk!*

a) Az $y = \operatorname{ch} x$ függvény $[0,3]$ fölötti része az x tengely körül.

b) Az $y = \ln x$ függvény $[1,e]$ fölötti része az y tengely körül.

Megoldás: a) A térfogat $\displaystyle\int_0^3 \pi\operatorname{ch}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^3 1+\operatorname{ch}(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\Big[x+\frac{1}{2}\operatorname{sh}(2x)\Big]_0^3 = \frac{\pi}{4}(6+\operatorname{sh} 6).$

Mivel $y' = \operatorname{sh} x$, a felszín $\displaystyle\int_0^3 2\pi\operatorname{ch} x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 2\pi\operatorname{ch}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(6+\operatorname{sh} 6).$

b) Az $y = \ln x$ $(x\in[1,e])$ görbedarab ugyanaz, mint az $x = e^y$ $(y\in[0,1])$ görbedarab, és az y tengely körüli forgatásával azt az alakzatot kapjuk, mintha az $y = e^x$ $(x\in[0,1])$ görbét forgatnánk az x tengely körül. A térfogat így $\displaystyle\int_0^1 \pi e^{2x}\,\mathrm{d}x = \pi\Big[\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2-1)$. Mivel $(e^x)' = e^x$, a felszín $\displaystyle\int 2\pi e^x\sqrt{1+e^2x}\,\mathrm{d}x.$

Az $\displaystyle\int_0^1 e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$ integrálra az $e^x = \operatorname{sh} u$, $e^x\,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u$ helyettesítést alkalmazzuk:

$\displaystyle\int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u = \int \operatorname{ch}^2 u\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{ch}(2u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2u + C = \frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\operatorname{sh} u\operatorname{ch} u + C = \frac{1}{2}\operatorname{arsh} e^x + \frac{1}{2}e^x\sqrt{1+e^{2x}} + C$, és ebből a felszín

$$2\pi\Big[\frac{1}{2}\operatorname{arsh} e^x + \frac{1}{2}e^x\sqrt{1+e^{2x}}\Big]_0^1 = \pi(\operatorname{arsh} e - \operatorname{arsh} 1 + e\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2}).$$