Határérték

Wettl Ferenc előadása alapján

2015.09.28. és 2015.09.30.

Definíció (Egyváltozós valós függvény)

f-et valós függvénynek nevezzük, amennyiben a valós számok egy részhalmazához (értelmezési tartomány - $D(f)$) rendel valós számokat oly módon, hogy az értelmezési tartomány minden eleméhez pontosan egy értéket rendel. Az értelmezési tartomány egy x értékéhez rendelt értéket $f(x)$ jelöli.

Definíció (Valós függvény grafikonja)

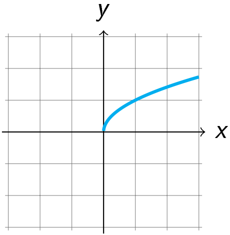
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D(f),\ y = f(x)\}$$

$\mathbb{R}^2$ egy részhalmaza akkor és csak akkor grafikonja egy függvénynek, ha minden függőleges egyenes legfeljebb egy pontban metszi.

Példa

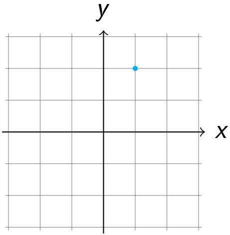
$f_1(x) = \sqrt{x}$

függvény



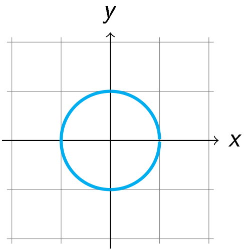
f_2: $D(f) = \{1\}$ $f(1) = 2$

függvény



$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

nem grafikonja függvénynek



- függvény: f minden irracionális x értékhez 1-et rendel hozzá

Definíció (Függvény határértéke a végtelenben)

1. Legyen f egy olyan függvény, amelyre $[N, \infty) \subseteq D(F)$ valamely alkalmas $N \in \mathbb{R}$ számra. Ekkor az f függvény **határértéke a végtelenben** L (jelölés: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$), ha

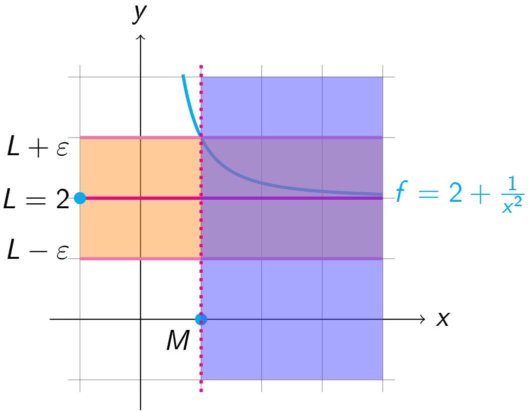
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M\ \forall x\ [x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

2. Legyen f egy olyan függvény, amelyre $(-\infty, N] \subseteq D(F)$ valamely alkalmas $N \in \mathbb{R}$ számra. Ekkor az f függvény **határértéke a mínusz végtelenben** L (jelölés: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$), ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m\ \forall x\ [x < m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

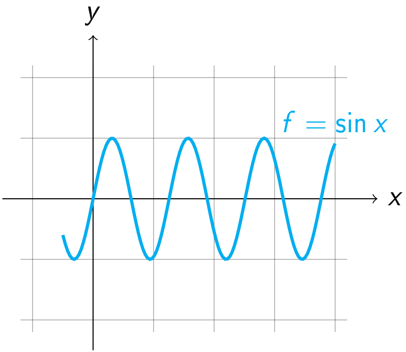
Példa

$\lim\limits_{x\to\infty} 2+\dfrac{1}{x^2}=2$, adott $\varepsilon>0$ értékhez $M=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ megfelelő



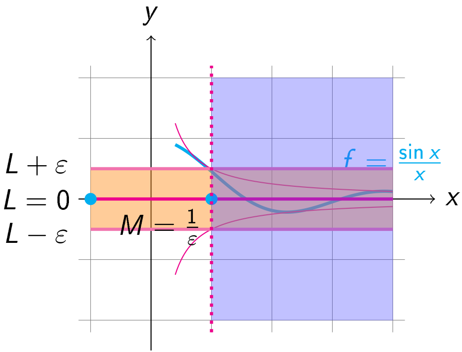
Példa

$\lim_{x\to\infty} \sin x$ nem létezik, hiszen minden M érték fölött felveszi az 1 és a -1 értékeket is, így bármilyen L értéket is vennénk, már pl. $\varepsilon = 1$-re sem lenne megfelelő M



Példa

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$, hisz adott $\varepsilon > 0$-hoz $M = \frac{1}{\varepsilon}$ megfelelő: ha $x > \frac{1}{\varepsilon}$, akkor $\left|\frac{1}{x}\sin x\right| \leq \frac{1}{|x|} < \varepsilon$.



Definíció (Függvény határértéke véges pontban)

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van valamely, a c-t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg c kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ tart L-hez, amint x tart c-hez (f határértéke a c helyen L), szimbolikusan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden x esetén, ha $0 < |x - c| < \delta$, akkor $|f(x) - L| < \varepsilon$. Formulával:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ \left[0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \right].$$

Intuitívan: az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel kerülhetnek az L számhoz, amennyiben az x értékek eléggé megközelítik c-t.

Példa (Az identikus és az abszolút érték függvény határértéke)

- Ha f az identikus leképezés, azaz minden x-re $f(x) = x$, akkor tetszőleges c esetén
$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c.$$
Adott $\varepsilon > 0$-hoz $\delta = \varepsilon$ megfelelő.
- Ha f az abszolút érték függvény, azaz minden x-re $f(x) = |x|$, akkor tetszőleges c esetén
$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} |x| = |c|.$$
Adott $\varepsilon > 0$-hoz $\delta = \varepsilon$ megfelelő.

Például
$$\lim_{x \to 3} x = 3, \quad \lim_{x \to -7} |x| = 7.$$

Példa (A konstans függvény határértéke)

- Ha f konstans függvény, azaz minden x-re $f(x) = k$ valamely k számra, akkor tetszőleges c esetén

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k.$$

Adott $\varepsilon > 0$-hoz $\delta = 1$ megfelelő (vagy bármilyen pozitív δ).

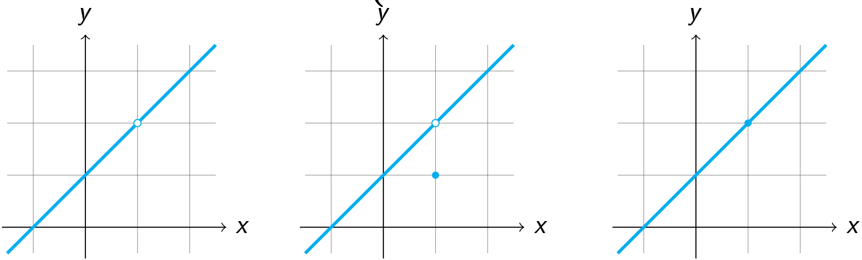
Például

$$\lim_{x\to -7}(4) = \lim_{x\to 2}(4) = 4.$$

Példa

Vessük össze az alábbi három függvény viselkedését az $x = 1$ pont környezetében.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{ha } x \neq 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases} \qquad h(x) = x + 1$$

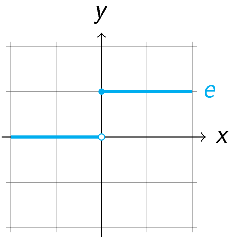


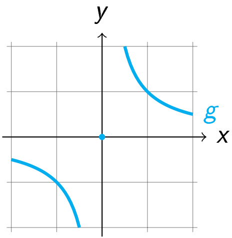
Az $c = 1$-ben vett határéték mindhárom függvény esetében 1.

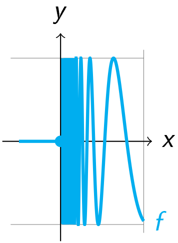
Példa (Amikor nem létezik határérték)

Hogyan viselkednek az alábbi függvények, amikor $x \to 0$?

$$e(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leqslant 0 \end{cases}$$







Definíció (Végtelen határértékek véges helyen)

1. Az f határértéke a c helyen végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty,$$

ha

$$\forall B \; \exists \delta > 0 \; \forall x \; [\, 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > B \,].$$

2. Az f határértéke a c helyen mínusz végtelen ($-\infty$), szimbolikusan

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty,$$

ha

$$\forall B \; \exists \delta > 0 \; \forall x \; [\, 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < B \,]$$

Példa (A definíció alkalmazása)

Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

Megoldás

Megmutatjuk, hogy

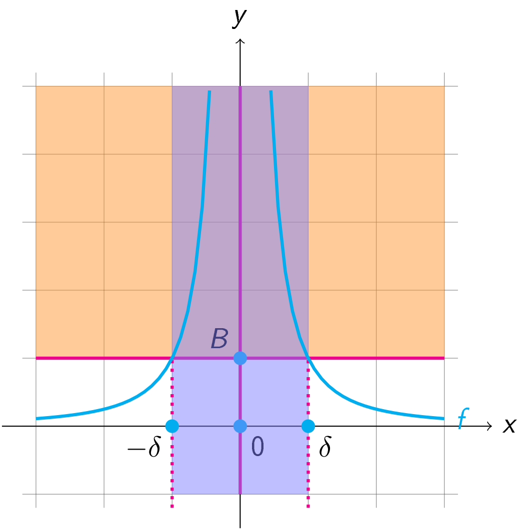
$$\forall B\, \exists \delta > 0\, \forall x\, [0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > B]$$

$B > 0$ esetén $\frac{1}{x^2} > B$ pontosan akkor, ha $x^2 < \frac{1}{B}$, azaz ha $|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$.
Legyen $\delta \le 1/\sqrt{B}$, akkor minden x-re

$$|x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \ge B.$$

$B \le 0$-ra pedig mindenképpen teljesül az $\frac{1}{x^2} > B$ egyenlőtlenség, tehát

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$



y
B
f
x
$-\delta$
0
δ

Definíció (Végtelen határértékek a végtelenben)

1. Az f függvény határértéke a végtelenben végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

ha

$$\forall B \; \exists M \; \forall x \; [\, x > M \Rightarrow f(x) > B \,].$$

2. Az f függvény határértéke a végtelenben mínusz végtelen ($-\infty$), szimbolikusan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$$

ha

$$\forall B \; \exists M \; \forall x \; [\, x > M \Rightarrow f(x) < B \,].$$

Megjegyzés

A $-\infty$-beli határértékeket hasonlóan definiáljuk.

Tétel (Határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M, k valós számok, és $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \text{ és } \lim_{x \to \alpha} g(x) = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők:

(1) Összeg, különbség: $\lim_{x \to \alpha} (f \pm g) = L \pm M$,

(2) Szorzat: $\lim_{x \to \alpha} (f \cdot g) = L \cdot M$,

(3) Konstanssal való szorzás: $\lim_{x \to \alpha} (k \cdot f) = k \cdot L$,

(4) Hányados: $\lim_{x \to \alpha} \frac{f}{g} = \frac{L}{M}$ (amennyiben $M \neq 0$),

(5) Hatványozás: $\lim_{x \to \alpha} f^n = L^n$, $n \in \mathbb{Z}$, feltéve, hogy L^n értelmezve van (működik racionális a kitevőre is, ha L^a értelmezve van).

Bizonyítás (csak (1)-et $\alpha = c \in \mathbb{R}$-re)

Legyen adva az $\varepsilon > 0$ szám. Meg kell adnunk egy pozitív δ-t, amelyre teljesül, hogy minden x esetén

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon.$$

A tagokat átrendezve és a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Bizonyítás (folytatás)

A megadott ε-hoz létezik olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$, hogy minden x-re

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2,$$
$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2.$$

Ha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor $0 < |x - c| < \delta$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon/2$, és $|g(x) - M| < \varepsilon/2$. Tehát

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami azt bizonyítja, hogy valóban: $\lim\limits_{x \to c}(f(x) + g(x)) = L + M$.

A tételben L és M lehet $\pm\infty$ is, de ilyenkor nem mindig tudjuk csupán a két függvény limeszéből meghatározni az összeg, szorzat, stb. limeszét:

$+$	$-\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
a	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

β	$-\infty$	$b<0$	0^-	$0^\pm$	0^+	$b>0$	$+\infty$
$\frac{1}{\beta}$	0	$\frac{1}{b}$	$-\infty$	*nincs*	$+\infty$	$\frac{1}{b}$	0

$\cdot$	$-\infty$	$b<0$	0	$b>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$a<0$	$+\infty$	ab	0	ab	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$a>0$	$-\infty$	ab	0	ab	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

0^+: pozitívan tart 0-hoz

0^-: negatívan tart 0-hoz

Az "eldönthetetlen" $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ limeszeknél a függvényt próbáljuk meg úgy átalakítani, hogy az új kifejezés limesze már eldönthető legyen.

Példa

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - x + 2 = \infty - \infty + 2 = \infty - \infty = ?, \text{ de}$$
$$\lim_{x\to\infty} x^2 - x + 2 = \lim_{x\to\infty} x^2\left(1 - \tfrac{1}{x} + \tfrac{2}{x^2}\right) = \infty \cdot (1 - 0 + 0) = \infty \cdot 1 = \infty.$$

Példa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^2 + 3} = \frac{\infty}{\infty} = ?, \text{ de}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^2 + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2 + \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{3}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Definíció

A $P(x)$ függvényt polinomnak nevezzük, ha alkalmas $a_0, \ldots, a_n$ valós számokkal $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ alakba írható. Az a_i értékeket a polinom együtthatóinak nevezzük. Ha $a_n \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy a $P(x)$ polinom foka n.

Tétel (Polinomok határértéke)

Ha $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, akkor

$$\lim_{x \to c} P = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Következmény

Ha $P(x)$ és $Q(x)$ polinomfüggvények és $Q(c) \neq 0$, akkor

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Tétel (Rendőrelv (Szendvicstétel))

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére teljesül, hogy $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, és

$$\lim_{x \to c} g = \lim_{x \to c} h = L,$$

akkor fennáll $\lim\limits_{x \to c} f = L$ is.

Tétel

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére $f(x) \leq g(x)$, és léteznek a $\lim\limits_{x \to c} f$ és $\lim\limits_{x \to c} g$ határértékek, akkor

$$\lim_{x \to c} f \leq \lim_{x \to c} g.$$

A fenti két tétel $\pm\infty$-beli limeszekre és végtelen határértékre is teljesül.

Példa (A rendőrelv alkalmazása)

Mennyi a következő határérték?

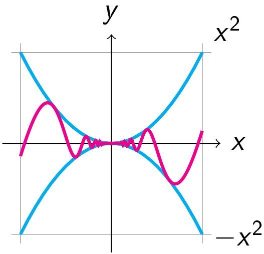
$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$$

Megoldás

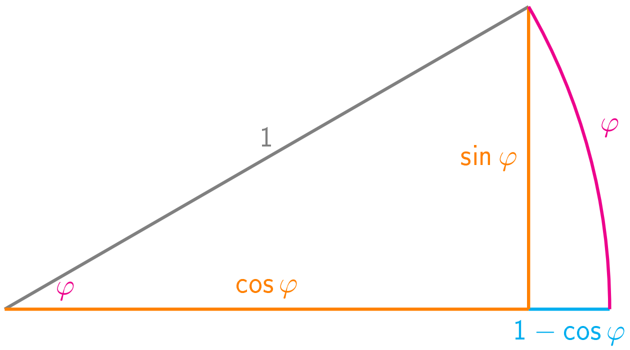
$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$

$\lim\limits_{x \to 0} -x^2 = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, így

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$



Példa (A rendőrelv további alkalmazásai)



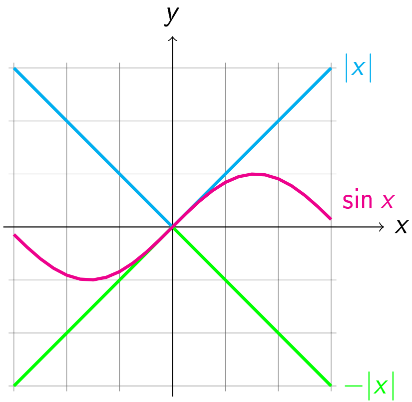
Radiánban írva:

$$|\sin\varphi| \leqslant |\varphi|$$

$$0 \leqslant 1-\cos\varphi \leqslant |\varphi|$$

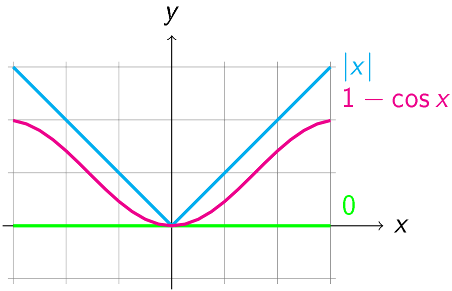
$-|\varphi| \leq \sin\varphi \leq |\varphi|$, és $\lim\limits_{\varphi\to 0}(-|\varphi|) = \lim\limits_{\varphi\to 0}(|\varphi|) = 0$, ezért

$$\lim_{\varphi\to 0} \sin\varphi = 0.$$



$0 \leqslant 1 - \cos\varphi \leqslant |\varphi|$, így

$$\lim_{\varphi\to 0}(1-\cos\varphi) = 0, \quad \text{azaz} \quad \lim_{\varphi\to 0}\cos\varphi = 1$$



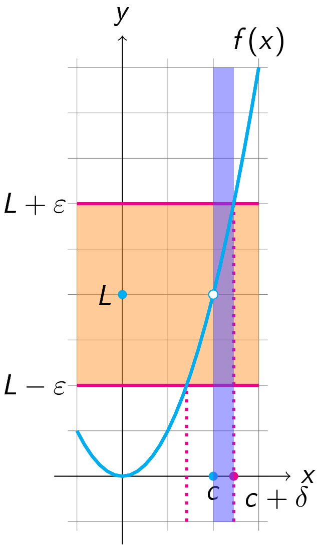
Definíció (Jobb és bal oldali határérték)

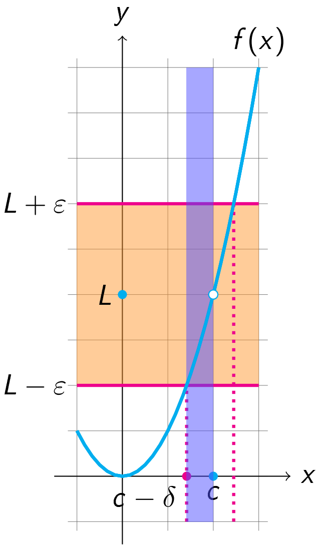
Az f függvény jobb oldali határértéke a c helyen az L szám (jelölése: $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c+0} f(x) = L$), ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ [c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

Az f függvény bal oldali határértéke a c helyen az L szám (jelölése: $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c-0} f(x) = L$), ha

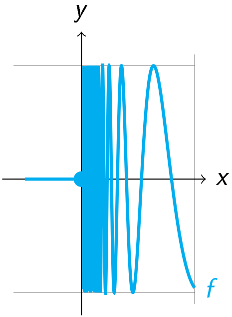
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ [c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$


y
f(x)
L + ε
L
L − ε
x
c
c + δ



y
$f(x)$
$L+\varepsilon$
L
$L-\varepsilon$
x
$c-\delta$
c

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leqslant 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \text{NEM LÉTEZIK}$$

Tétel (Jobb és bal oldali határérték és határérték kapcsolata)

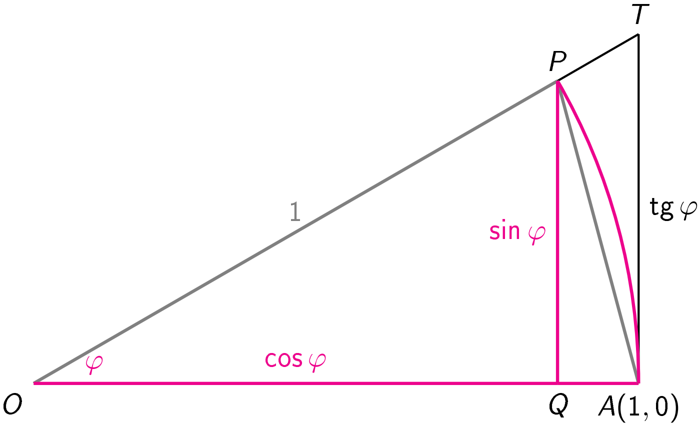
f-nek pontosan akkor létezik a c helyen határértéke, ha ugyanitt létezik mind a jobb, mind a bal oldali határértéke és ezek egyenlőek:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^+} f(x) = L \text{ és } \lim_{x \to c^-} f(x) = L.$$

Tétel (A $sin(\varphi)/\varphi$ függvény határértéke)

Ha a φ szöget radiánban adjuk meg, akkor

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1.$$



$OAP\,\triangle$ területe $<$ OAP körcikk területe $<$ $OAT\,\triangle$ területe.

Bizonyítás

Belátjuk: a jobb és a bal oldali határérték 1 $\rightsquigarrow$ kétoldali határérték is 1.

1. A jobb oldali határérték 1 $(0 < \varphi < \pi/2)$:

$$OAP \triangle \text{ területe } < OAP \text{ körcikk területe } < OAT \triangle \text{ területe.}$$

A területek:

$$T_{OAP\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \text{ alap } \cdot \text{ magasság } = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \sin\varphi$$

$$T_{OAP \text{ körcikk}} = \tfrac{1}{2} \cdot \text{ ívhossz } \cdot \text{ sugár } = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \varphi = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 \cdot \varphi = \frac{\varphi}{2}$$

$$T_{OAT\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \text{ alap } \cdot \text{ magasság } = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi$$

Az egyenlőtlenségbe helyettesítve:

$$\frac{1}{2} \sin\varphi < \frac{1}{2}\varphi < \frac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi$$

$\frac{1}{2}\sin\varphi$-val osztva ($\sin\varphi > 0$):

$$1 < \frac{\varphi}{\sin\varphi} < \frac{1}{\cos\varphi}$$

A reciprokokat véve:

$$1 > \frac{\sin\varphi}{\varphi} > \frac{\cos\varphi}{1}$$

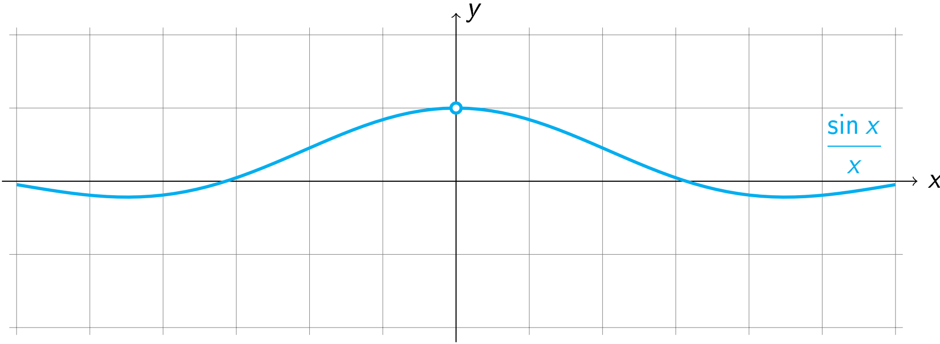
a redőrelv alapján

$$\lim_{\varphi\to 0^+} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$$

2. $\sin\varphi$ és φ páratlan függvények $\to$ $(\sin\varphi)/\varphi$ páros $\to$

$$\lim_{\varphi\to 0^+} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = \lim_{\varphi\to 0^-} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1,$$

így $\lim\limits_{\varphi\to 0} \dfrac{\sin\varphi}{\varphi} = 1.$

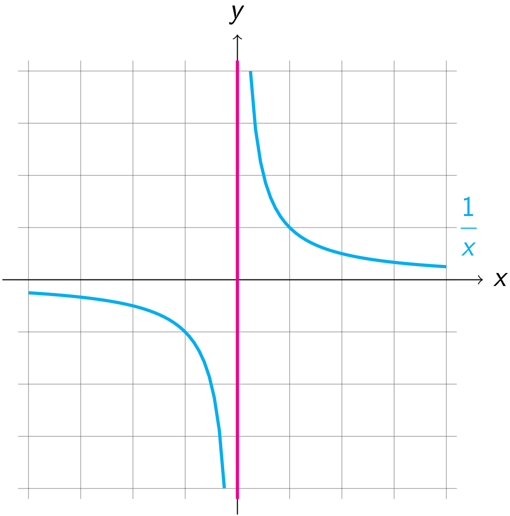


y
x
$\frac{\sin x}{x}$

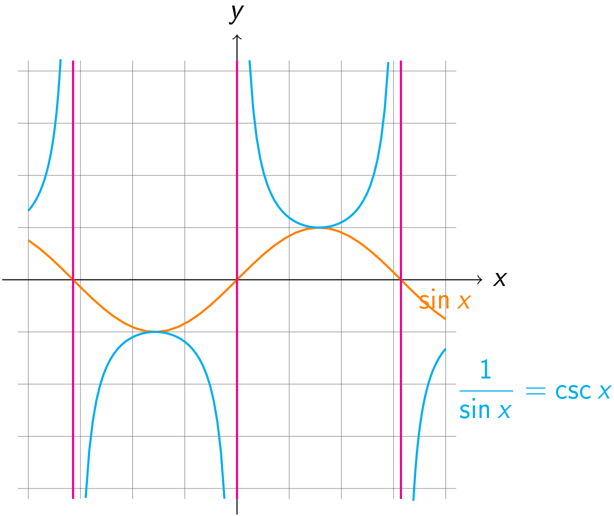
Definíció (Függőleges aszimptota)

Az $x = a$ egyenletű egyenes az $y = f(x)$ függvény grafikonjának függőleges aszimptotája, ha az alábbiak közül legalább egy teljesül:

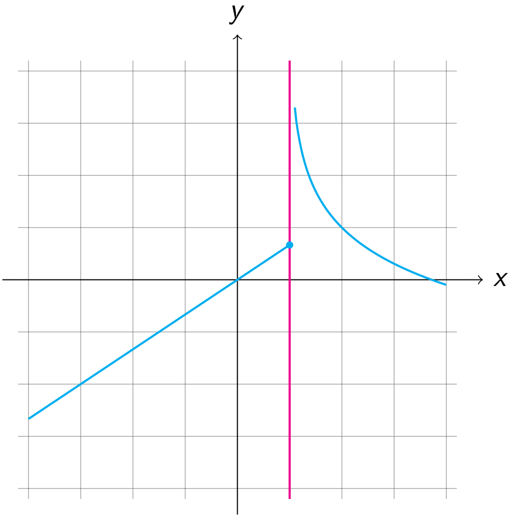
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty; \ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty; \ \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty; \ \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$



y
$\frac{1}{x}$
x



y
x
$\sin x$
$\frac{1}{\sin x} = \csc x$

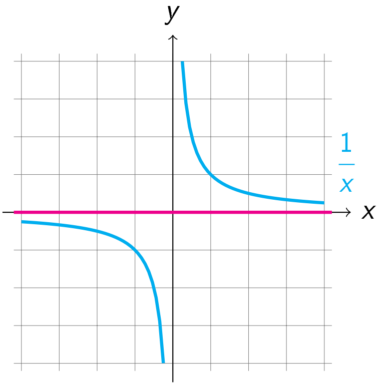


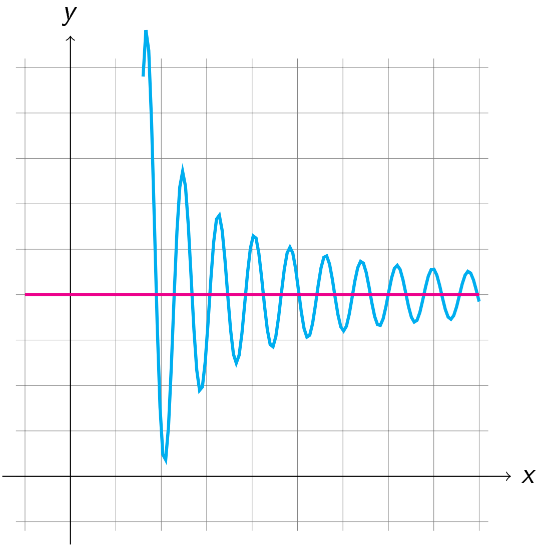
y
x

Definíció (Vízszintes aszimptota)

Az $y = b$ egyenletű egyenest az $y = f(x)$ függvény grafikonja vízszintes aszimptotájának nevezzük, ha

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$




y
x

Definíció (Ferde aszimptota (tartalmazza a vízszintest is))

Az $y = ax + b$ egyenletű egyenest az $y = f(x)$ függvény grafikonja ferde aszimptotájának nevezzük, ha

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Megjegyzés

Az a és b meghatározható az

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ és a } b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$$

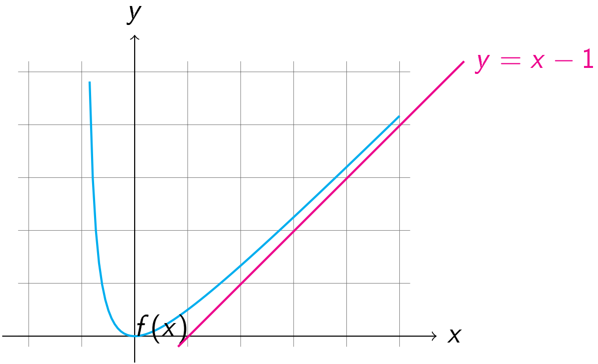
határértékek segítségével, ugyanis $f(x) - (ax + b) \to 0$ miatt $\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \to 0$, azaz $\frac{f(x)}{x} \to a$.

Példa

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$



Összefoglalás

- Határértékek definíciói példákkal
- Függvények összegének, szorzatának, hányadosának, skalárszorosának, hatványának határértéke
- Rendőrelv
- $\dfrac{\sin x}{x}$ határértéke
- Aszimptoták