

Határozatlan integrál

2015.11.04.

- 1 Primitív függvény
- 2 Határozatlan integrál
- 3 Alapintegrálok
- 4 Integrálási szabályok
- 5 Helyettesítéses integrálás
- 6 Parciális integrálás
- 7 Összefoglalás

Primitív függvény

Definíció

$F(x)$ az $f(x)$ **primitív függvénye** a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon, ha $F'(x) = f(x)$ minden $x \in H$ esetén.

Megjegyzés

Ha $F(x)$ primitív függvény, akkor $F(x) + c$ is az tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén.

Korábban már bizonyítottuk:

Állítás

Ha F és G is primitív függvénye f -nek egy nyílt I intervallumon, akkor létezik $c \in \mathbb{R}$, hogy $G(x) = F(x) + c$ minden $x \in I$ esetén.

Példa

$f(x) = \cos x$ -nek $F(x) = \sin x$ primitív függvénye a teljes \mathbb{R} -en

Definíció

Az f függvény határozatlan integrálja f primitív függvényeinek összessége.

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

ahol F az f függvény egy primitív függvénye, és $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Megjegyzés

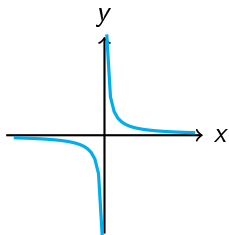
Itt feltesszük, hogy $F'(x) = f(x)$ egy intervallumon, és hogy ott vesszük a többi primitív függvényt is.

Példa

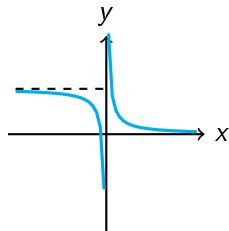
Ha nem egy intervallumon vennék a primitív függvényeket:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \implies -\frac{1}{x^2}\text{-nek primitív}$$

függvénye az $\frac{1}{x}$:



de akkor ez is:



Viszont e két függvény különbsége nem konstans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ -on.

Példa

Ha $x > 0$, akkor

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \implies \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \text{ a } (0, \infty)\text{-en}$$

Ha $x < 0$, akkor

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} \implies \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C \text{ a } (-\infty, 0)\text{-n}$$

Összefoglalva azt is szoktuk írni, hogy

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C,$$

de egyszerre csak az $x > 0$ vagy az $x < 0$ esetre alkalmazzuk.

Alapintegrálok

$f(x)$	$\int f(x) dx$
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ $a \in \mathbb{R}, a \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$ $x < 0$ vagy $x > 0$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$ $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right) k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$ $x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$
e^x	$e^x + C$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$

Alapintegrálok (folytatás)

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x + C$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x + C$ $x < 0$ vagy $x > 0$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arth} x + C$ $x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcth} x + C$ $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin} x + C$ $x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsh} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arch} x + C$ $x \in (1, \infty)$

Az integrálás általános szabályai

Állítás

- $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$
- $\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$, ahol F az f egy primitív függvénye

Bizonyítás

Az összegre és skalárszorosra vonatkozó deriválási szabályból, illetve a láncszabályból következik.

Példa

$$\int 2\sqrt{x} + \frac{3}{x^2} dx = \int 2x^{1/2} + 3x^{-2} dx = 2 \frac{x^{3/2}}{3/2} + 3 \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{3}{x} + C$$

A fordított láncszabály néhány speciális esete

Állítás

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C, \text{ ha } F'(x) = f(x)$$

Bizonyítás

A láncszabály megfordítása $f(x)$, $g(x) \rightarrow ax + b$ szereposztással.

Példa

$$\int e^{2x+3} dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C$$

Állítás

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

Bizonyítás

A láncszabály megfordítása $f(x) \rightarrow \frac{1}{x}$, $g(x) \rightarrow f(x)$ szereposztással.

Példa

$$\int \frac{x+1}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}x + C$$

Állítás

$$\int f^a(x) f'(x) dx = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1} + C$$

Bizonyítás

A láncszabály megfordítása $f(x) \rightarrow x^a$, $g(x) \rightarrow f(x)$ szereposztással.

Példa

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = - \int (\cos x)^{-3} (-\sin x) dx = - \frac{(\cos x)^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{\cos^2 x} + C$$

Példa

$$\int \sin^3 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \int \sin x + \cos^2 x (-\sin x) \, dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

Példa

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin 2x) + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

A $\cos^2 x$ függvény átalakításánál a

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$ képletekből

levezethető

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

linearizáló formulák egyikét használtuk.

$\int \sin^n x \cos^m x \, dx$ alakú integrálok ($n, m \in \mathbb{N}$)

Ha n páratlan $\implies n = 2k + 1$:

$$\sin^{2k+1} x \cos^m x = \sin x (\sin^2 x)^k \cos^m x =$$

$$\sin x (1 - \cos^2 x)^k \cos^m x = p(\cos x) \sin x,$$

ahol p egy megfelelő polinom. Ha P a p egy primitív függvénye, akkor

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx = - \int p(\cos x) (-\sin x) \, dx = -P(\cos x) + C$$

Ha m páratlan, akkor hasonlóan lehet eljárni.

Ha m és n is páros, akkor a $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ és $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

linearizáló formulákat lehet alkalmazni. Ezeket behelyettesítve kisebb hatványokat tartalmazó kifejezést kapunk.

Helyettesítéses integrál

Az $\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$ szabály felírható

$$\int f(g(x))g'(x) dx \stackrel{g(x)=u}{=} \int f(u) du$$

alakban is, mert $\int f(u) du = F(u) + C$. Formálisan a

$$g(x) = u, \quad g'(x) dx = du$$

helyettesítést hajtjuk végre.

Akkor érdemes alkalmazni, ha f primitív függvényének kiszámítása nem megy egy lépésben.

Példa

$$\int \frac{e^{3x}}{2 + e^{2x}} dx = \int \frac{(e^x)^3}{2 + (e^x)^2} dx = \int \frac{(e^x)^2}{2 + (e^x)^2} e^x dx \stackrel{e^x \equiv u}{=} \int \frac{u^2}{2 + u^2} du = \int 1 - \frac{2}{2 + u^2} du = \int 1 - \frac{1}{1 + (\frac{1}{\sqrt{2}}u)^2} du =$$

$$u - \frac{\arctg \frac{u}{\sqrt{2}}}{1/\sqrt{2}} + C \stackrel{u \equiv e^x}{=} e^x - \sqrt{2} \arctg \frac{e^x}{\sqrt{2}} + C$$

A szorzatszabály megfordítása - parciális integrálás

Állítás

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx, \text{ vagy másképpen}$$

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx, \text{ ahol } F'(x) = f(x).$$

Szorzat integrálja helyett egy másik szorzat integrálját kell kiszámítani.

Bizonyítás

A szorzatra vonatkozó deriválási szabály:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\text{Ebből: } \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) + C$$

$$\implies \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Akkor célszerű használni az $f(x)g(x)$ szorzat integrálására, ha

- $g'(x)$ lényegesen egyszerűbb mint $g(x)$
- $F(x)$ nem sokkal bonyolultabb $f(x)$ -nél

Függvénytípusok	derivált	primitív függvény
x^n	kicsit egyszerűbb (főleg ha $n = 1$)	kicsit bonyolultabb
$\frac{1}{x^n}$	kicsit bonyolultabb	kicsit egyszerűbb (kivéve $n = 1$)
e^x $\sin x, \cos x$ $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$	ugyanolyan	ugyanolyan
$\ln x$ arc függvények area függvények	egyszerűbb	bonyolultabb

Példa

- $\int x e^{2x} dx = x \frac{e^{2x}}{2} - \int 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$
- $\int \frac{1}{x^3} \ln x dx = \frac{x^{-2}}{-2} \ln x - \int \frac{1}{-2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{2x^2} \ln x +$
 $\int \frac{1}{2} x^{-3} dx = -\frac{1}{2x^2} \ln x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} \ln x - \frac{1}{4x^2} + C$
- $\int \arctg x dx = \int 1 \cdot \arctg x dx = x \arctg x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx =$
 $x \arctg x - \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
- Hasonlóan számítjuk ki a többi arc, area és az ln fv. integrálját.

Példa

Néha többszöri alkalmazás szükséges:

$$\begin{aligned} \bullet \int (x^2 - x) \cos x \, dx &= (x^2 - x) \sin x - \int (2x - 1) \sin x \, dx = \\ &= (x^2 - x) \sin x - (2x - 1)(-\cos x) + \int 2(-\cos x) \, dx = \\ &= (x^2 - x) \sin x + (2x - 1) \cos x - 2 \sin x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int e^x \sin x \, dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x (-\sin x) \, dx \\ \int e^x \sin x \, dx = I &\implies I = e^x \sin x - e^x \cos x - I \\ I &= \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C \end{aligned}$$

Összefoglalás

- Primitív függvény és határozatlan integrál fogalma
- Alapintegrálok és integrálási szabályok
- A láncszabály megfordításának speciális formái
- Helyettesítéses integrálás
- Parciális integrálás