

Határozott integrál

2015.11.09. és 2015.11.11.

- 1 Határozott integrál és integrálhatóság
- 2 A határozott integrál tulajdonságai
- 3 Integrál-középtértétel
- 4 Newton–Leibniz-tétel
- 5 Helyettesítéses integrálás határozott integrálra
- 6 Összefoglalás

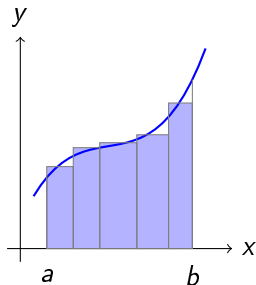
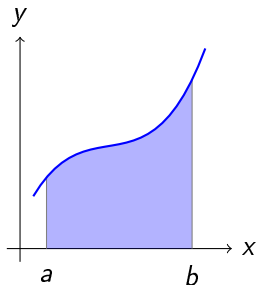
A határozott integrál fogalma

Példa

Függvénygörbe alatti terület kiszámítása: $f \geq 0$ az $[a, b]$ intervallum fölött.

Ha $f(x) = c$ konstans: $\implies T = (b - a)c$ (téglalap területe).

Ha f nem konstans: közelítés téglalapokkal.



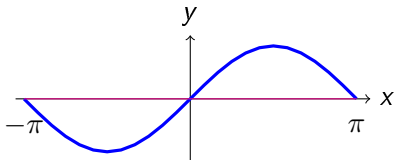
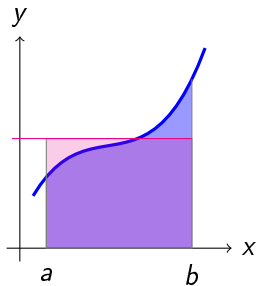
A téglalapok magassága egy-egy részintervallumbeli függvényérték.

Példa

Függvényértékek átlaga: ($f \geq 0$ -ra) annak a téglalaprak a magassága, amelynek alapja az $[a, b]$ intervallum, és területe az f függvény alatti terület.

Ha $f \not\geq 0$: az x tengely alatti részek területét negatívan vesszük.

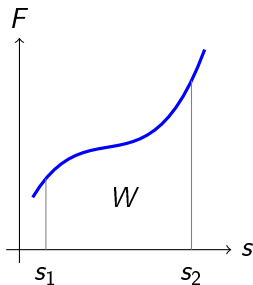
Pl. a $\sin x$ fv. átlaga $[-\pi, \pi]$ -n 0.



Példa

Egyenes útvonalon F erő által mozgatott tömegponton az F erő által végzett munka: $W = F \cdot \Delta s$, ha F állandó.

Ha az erő változó:



Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ -n korlátos, legfeljebb véges sok helyen nem értelmezett függvény.

Definíció

Ha $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, akkor $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ -t az $[a, b]$ intervallum egy felosztásának nevezzük.

A P felosztás finomsága:

$$\|P\| = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}).$$

$c = \{c_1, \dots, c_n\}$ egy P -hez tartozó reprezentánsrendszer, ha $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$.

A P felosztáshoz és c reprezentánsrendszerhez tartozó integrálközelítő összeg:

$$I_{P,c} = \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum f(c_k)\Delta x_k$$

Definíció

Legyen f az $[a, b]$ intervallumon korlátos, legfeljebb véges sok pontban nem értelmezett függvény.

f **integrálható** $[a, b]$ -n, ha van olyan $I \in \mathbb{R}$, amelyre minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden δ -nál finomabb P felosztásra és annak tetszőleges \mathbf{c} reprezentánsrendszeréhez tartozó $I_{P,\mathbf{c}}$ integrálközelítő összegre

$$|I_{P,\mathbf{c}} - I| < \varepsilon.$$

Ez az I érték az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett **integrálja**, és jele:

$\int_a^b f(x) dx$. Formulával:

$$\int_a^b f(x) dx = I \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall P, \mathbf{c} \left(\|P\| < \delta \implies |I_{P,\mathbf{c}} - I| < \varepsilon \right)$$

Példa

Az $f(x) = c$ konstans függvény minden $[a, b]$ intervallumon integrálható, és $\int_a^b c \, dx = c(b - a)$, ugyanis tetszőleges felosztásra és c reprezentáns rendszerre az integrálközelítő összeg

$$\sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a).$$

Példa

A Dirichlet-fv. (racionálisakon 1, máshol 0) nem integrálható a $[0, 1]$ intervallumon, ugyanis bármely P felosztás minden részintervallumában felvesz 0 és 1 értéket is, tehát a felosztáshoz tartozik

$$\sum_{k=1}^n 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0, \text{ és } \sum_{k=1}^n 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1$$

közelítő összeg is. Így nincs olyan l , amihez az elég finom felosztások integrálközelítő összegei mind közelebb esnének $\varepsilon = \frac{1}{2}$ -nél.

Tétel

Ha az f függvény korlátos, és legfeljebb véges sok pont kivételével folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor f integrálható az $[a, b]$ -n.

Példa

Számítsuk ki az e^x függvény integrálközelítő összegeit a $[0, 1]$ intervallumon, ha $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ és $\mathbf{c} = (0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n})!$

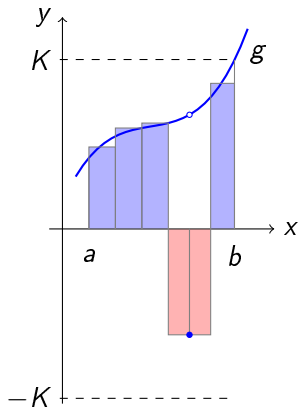
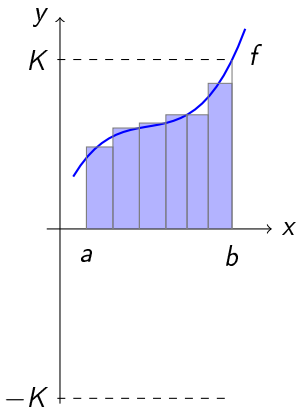
$$I_{P,\mathbf{c}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{1/n})^k = \frac{1}{n} \cdot \frac{(e^{1/n})^n - 1}{e^{1/n} - 1} = \frac{1/n}{e^{1/n} - 1} \cdot (e - 1).$$

Vegyük észre, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \stackrel{L'H(0/0)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1$, így a tétel szerint létező

$\int_0^1 e^x dx$ integrál értéke csak $e - 1$ lehet.

Tétel

Ha egy integrálható függvényt véges sok helyen megváltoztatunk, az továbbra is integrálható marad, és az integrálja nem változik.



Bizonyítás

Elég az állítást arra az esetre belátni, amikor 1 pontban változtatunk. Legyen f az eredeti függvény, g az a függvény amit egy c -beli érték megváltoztatásával kapunk, és $I = \int_a^b f(x) dx$.

f integrálható $\implies f$ korlátos $\implies g$ is korlátos \implies

$\exists K$ közös korlát: $|f(x)| \leq K, |g(x)| \leq K$ az $[a, b]$ -n.

Rögzítsünk egy δ -nál finomabb felosztást, és ahhoz egy reprezentáns rendszert, és legyen l_1, l_2 az f , illetve g megfelelő integrál közelítő összege.

Ekkor $f(c)$, illetve $g(c)$ legfeljebb két tagban szerepel, és

$$|g(c) - f(c)| \leq 2K \implies |l_2 - l_1| < 4K\delta.$$

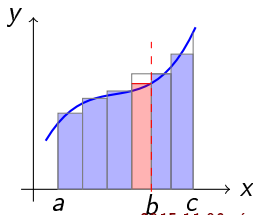
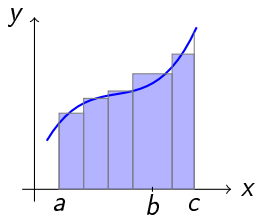
Ha δ -t úgy választjuk, hogy $|l_1 - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $4K\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ legyen, akkor

$$|l_2 - I| = |(l_2 - l_1) + (l_1 - I)| \leq |l_2 - l_1| + |l_1 - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Műveleti tulajdonságok

Tétel

- 1 $\int_a^b kf(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$
- 2 $\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- 3 Ha f integrálható $[a, b]$ -n és $[b, c]$ -n, akkor $[a, c]$ -n is, és
 $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$ (additivitás)



Definíció

$\int_a^a f(x) dx = 0$ tetszőleges a -ra és a -ban értelmezett f -re.

$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$, ha $a < b$, és f integrálható $[a, b]$ -n.

Megjegyzés

Az előbbi definíciókkal az integrál additivitása

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

az a, b, c számok bármely sorrendjére, és egybeeső értékekre is teljesül, pl.

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx = 0 = \int_a^a f(x) dx.$$

Integrálegyenlőtlenségek

Tétel

- ① Ha $m \leq f(x) \leq M$ az $[a, b]$ -n, akkor

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

- ② Ha $f(x) \leq g(x)$ az $[a, b]$ -n, akkor

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

- ③ $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$

Bizonyítás

- 2 Tfh. $f(x) \leq g(x)$ az $[a, b]$ -n. Ha nem igaz az állítás, vagyis

$$I_1 = \int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx = I_2,$$

akkor $\varepsilon = (I_1 - I_2)/2$ -re válasszunk közös δ -t I_1 -hez és I_2 -höz.

Ha veszünk egy δ -nál finomabb P felosztást, és $I_{P,c}(f)$, illetve $I_{P,c}(g)$ a két függvény közös reprezentáns rendszeréhez tartozó integrálközelítő összege, akkor

$$I_{P,c}(f) > I_1 - \varepsilon = I_2 + \varepsilon > I_{P,c}(g),$$

holott $f \leq g \implies I_{P,c}(f) \leq I_{P,c}(g)$. \neq

- 1 Alkalmazzuk a 2. állítást az m , $f(x)$ és M függvényekre.
 3 Alkalmazzuk a 2. állítást a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ függvényekre.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} \, dx \leq \frac{3}{2}.$$

$\cos x \leq 1 \implies \sqrt{1 + \cos x} \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}$, így az 1. egyenlőtlenség szerint

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} \, dx \leq \frac{3}{2}(1 - 0) = \frac{3}{2}.$$

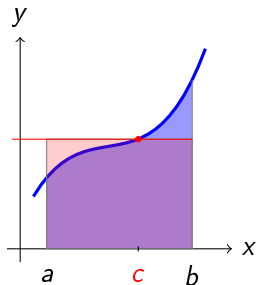
Integrál-közéértéktétel

Tétel

Ha f folytonos $[a, b]$ -n $\implies \exists c \in [a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c),$$

azaz f átlaga előáll függvényértékként.



Bizonyítás

f folytonos \implies a Weierstrass-tétel szerint felveszi minimumát (m) és maximumát (M) az $[a, b]$ -n.

Az 1. integrálegyenlőtlenség miatt:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a)$$

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M.$$

m és M is függvényértékek $[a, b]$ -n \implies a Bolzano–Darboux-tétel szerint f közöttük minden értéket fölvesz, így az $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx$ értéket is.

Változó határú integrál

Tétel

Legyen f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, és definiáljuk az $I(x)$ integrálfüggvényt $[a, b]$ -n:

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

$I(x)$ értelmezve van, folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n és

$$I'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Bizonyítás

f folytonos $[a, b]$ -n $\implies \int_a^x f(t) dt$ értelmezve van $\forall x \in [a, b]$ -re.

Diffhatóság: tetszőleges $c, c+h \in (a, b)$ -re

$$\frac{I(c+h) - I(c)}{h} = \frac{\int_a^{c+h} f(x) dx - \int_a^c f(x) dx}{h} = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(x) dx = f(x_h)$$

valamely c és $c+h$ közötti x_h számra az integrál-középértéktétel miatt.

$\lim_{h \rightarrow 0} x_h = c \implies$ az f folytonossága miatt $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_h) = f(c)$. Így

$$I'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(x) dx = f(c).$$

Mivel f diffható (a, b) -n, ott folytonos is.

Bizonyítás (folytatás)

A végpontokban is teljesül az egyoldali folytonosság:

Legyen $h > 0$, $a + h \leq b$.

$$I(a+h) - I(a) = \int_a^{a+h} f(x) \, dx - \int_a^a f(x) \, dx = \int_a^{a+h} f(x) \, dx$$

A Weierstrass-tétel miatt $\exists m = \min f$ és $M = \max f$ az $[a, b]$ -n, és az 1. integrálegyenlőtlenségből

$$mh \leq \int_a^{a+h} f(x) \, dx \leq Mh$$

A rendőrelv miatt ebből $\lim_{h \rightarrow 0} I(a+h) - I(a) = 0$ következik.

A b -beli bal oldali folytonosság hasonlóan bizonyítható.

Newton–Leibniz-tétel

Tétel

Ha f és F folytonosak $[a, b]$ -n, és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás

Az előző tétel szerint az $I(x)$ integrálfv. kielégíti a tétel feltételeit, és arra

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx = I(b) - I(a) \text{ is teljesül.}$$

Mindkét függvény primitív függvénye f -nek (a, b) -n, ezért $\exists c \in \mathbb{R}$:

$I(x) - F(x) = c$ az (a, b) intervallumon, és a folytonosság miatt az $[a, b]$ -n

$$\text{is. Így } \int_a^b f(x) dx = I(b) - I(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

Jelölés

$$F(b) - F(a) =: \left[F(x) \right]_a^b$$

Példa

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} \, dx = \int_0^1 \sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \, dx = \int_0^1 \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \, dx =$$

$$\left[\sqrt{2} \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \right]_0^1 = 2\sqrt{2} \sin \frac{1}{2} \approx 1,356$$

Hasonlítsuk össze a korábbi becsléssel!

Példa

$$\int_0^3 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx = \int_0^2 -\frac{x-2}{x+1} dx + \int_2^3 \frac{x-2}{x+1} dx =$$

$$\int_0^2 \frac{3}{x+1} - 1 dx + \int_2^3 1 - \frac{3}{x+1} dx = [3 \ln(x+1) - x]_0^2 + [x - 3 \ln(x+1)]_2^3 =$$

$$3 \ln 3 - 2 + 3 - 3 \ln 4 - 2 + 3 \ln 3 = 6 \ln 3 - 3 \ln 4 - 1$$

Helyettesítéses integrálás határozott integrálra

Az $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \left[F(g(x)) \right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$ integrált kiszámíthatjuk helyettesítéssel:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Példa

$$\int_1^4 \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} dx = \int_1^4 2 \cdot \frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

Ezt az $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ helyettesítéssel átírva:

$$\int_1^2 2 \frac{u^3 + u^2}{u + 2} du = \int_1^2 2u^2 - 2u + 4 - \frac{8}{u + 2} du = \left[\frac{2}{3}u^3 - u^2 + 4u - 8 \ln(u + 2) \right]_1^2 = \frac{17}{3} - 8 \ln \frac{4}{3}.$$

Összefoglalás

- Közelítő összegek, a határozott integrál definíciója, integrálhatóság
- Műveleti tulajdonságok
- Integrálegyenlőtlenségek
- Integrál-középértéktétel
- Változó határú integrál, a Newton–Leibniz-tétel
- Helyettesítéses integrálás határozott integrálra