

Improprius integrál és a határozott integrál alkalmazásai

2015.11.25. és 2015.11.30.

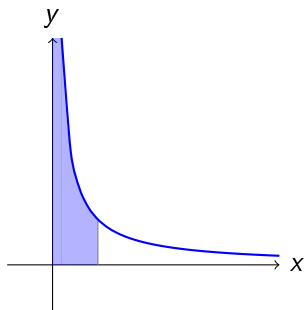
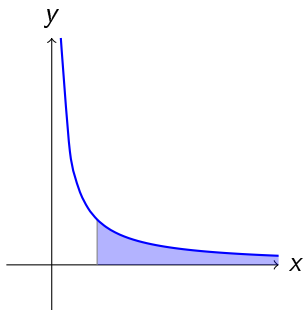
- 1 Impropius integrálok
 - Integrálás végtelen intervallumon
 - Függőleges aszimptotájú függvény integrálása
 - Összehasonlító konvergencia kritériumok
- 2 A határozott integrál alkalmazásai
 - Területszámítás
 - Függvény grafikonjának ívhossza
 - Forgástest térfogata és felszíne

Improprius integrálok

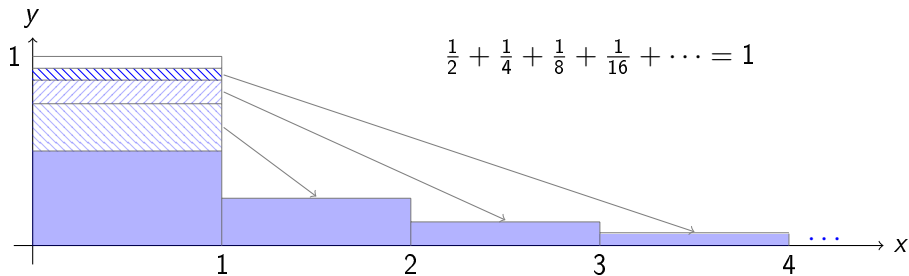
Eddig határozott integrálásnál megköveteltünk két dolgot:

- az integrálási tartomány egy véges intervallum legyen,
- az integrálandó függvény legyen korlátos az integrálási tartományon.

A függvény alatti terület ettől eltérő esetekben is lehet jól definiált:



Sőt, végtelen kiterjedésű tartomány területe is lehet véges.



Integrálás végtelen intervallumon

Definíció

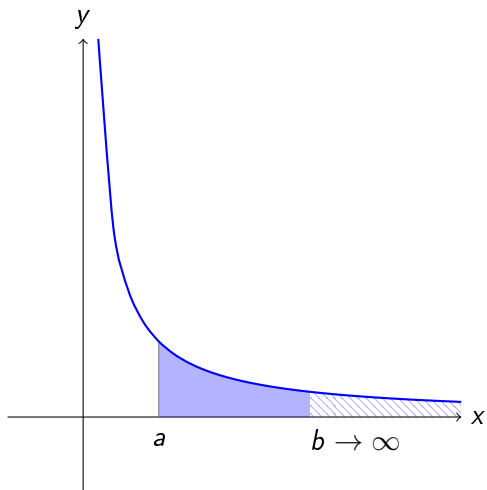
Ha $f(x)$ folytonos az $[a, \infty)$ (ill. $(-\infty, a]$) intervallumon, akkor

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad \left(\text{ill.} \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \right).$$

Ha $f(x)$ folytonos \mathbb{R} -en, és c tetszőleges valós szám, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx.$$

Ha bármelyik esetben a határérték létezik és véges, azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens, és a határérték az integrál értéke.



Példa

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(\ln b)^2}{2} = \infty,$$

vagyis ez az improprius integrál nem konvergens.

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \ln x \cdot x^{-2} dx \implies \text{parciálisan integrálva:}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \left[\ln x \cdot \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^b - \int_1^b \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} dx \right\} =$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{\ln b}{b} + \int_1^b x^{-2} dx \right\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{\ln b}{b} + \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^b \right\} =$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1 = 1, \text{ vagyis ez az integrál konvergens.}$$

Az $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ integrál

Ha $p = 1$, akkor:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty, \text{ vagyis ekkor az}$$

integrál nem konvergens.

Ha $p \neq 1$, akkor:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Ha $p < 1$, akkor a fenti határérték ∞ , így az integrál nem konvergens.

Ha $p > 1$, akkor a fenti határérték $-\frac{1}{1-p}$, így az integrál konvergens, és

értéke a határérték, vagyis $\frac{1}{p-1}$.

Függőleges aszimptotájú függvény integrálása

Definíció

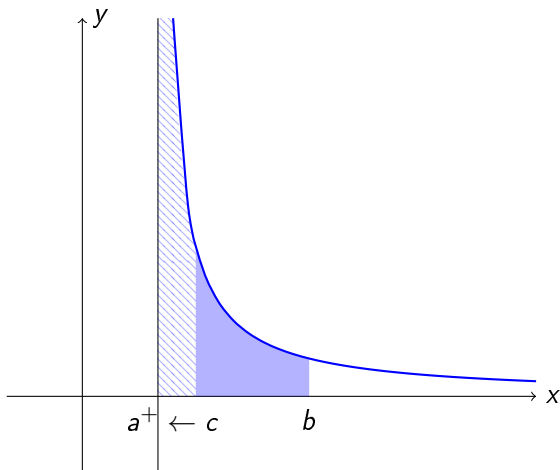
Ha $f(x)$ folytonos az $[a, b)$ (ill. $(a, b]$) intervallumon, de $x \rightarrow b^-$ (ill. $x \rightarrow a^+$) esetén nem korlátos, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx \quad \left(\text{ill.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx \right).$$

Ha $f(x)$ folytonos $[a, s) \cup (s, b]$ -n, de $x \rightarrow s$ esetén nem korlátos, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^s f(x) dx + \int_s^b f(x) dx.$$

Ha bármelyik esetben a határérték létezik és véges, azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens, és a határérték az integrál értéke.



Az $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ integrál

Ha $p = 1$, akkor:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} [\ln x]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} -\ln c = \infty, \text{ vagyis ekkor az}$$

integrál nem konvergens.

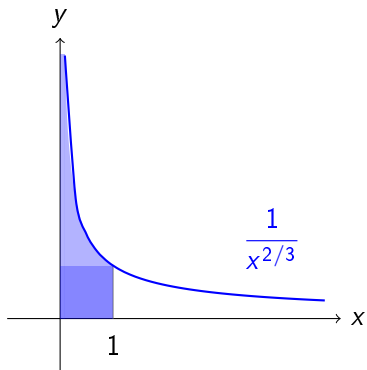
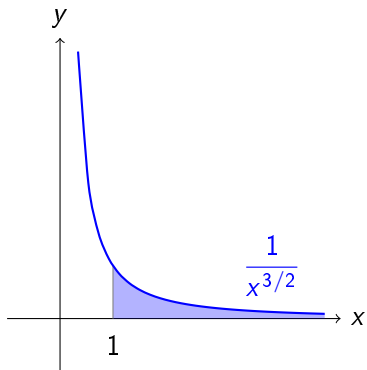
Ha $p \neq 1$, akkor:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 x^{-p} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-p} - \frac{c^{1-p}}{(1-p)}.$$

Ha $p > 1$, akkor a fenti határérték ∞ , így az integrál nem konvergens.

Ha $p < 1$, akkor a fenti határérték $\frac{1}{1-p}$, így az integrál konvergens, és

értéke a határérték, vagyis $\frac{1}{1-p}$.



Összehasonlító konvergencia kritériumok

Állítás

Legyenek f és g az $[a, \infty)$ intervallumon folytonos függvények, melyekre minden $x \geq a$ esetén $0 \leq f(x) \leq g(x)$ teljesül. Ekkor:

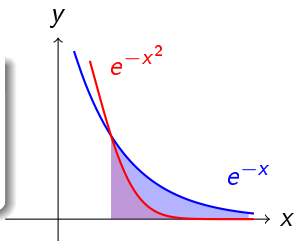
- 1 ha $\int_a^{\infty} g(x) dx$ konvergens, akkor $\int_a^{\infty} f(x) dx$ is konvergens (majoráns kritérium);
- 2 ha $\int_a^{\infty} f(x) dx$ nem konvergens, akkor $\int_a^{\infty} g(x) dx$ sem konvergens (minoráns kritérium).

Megjegyzés

Az állítás a többi típusú improprius integrál esetén is igaz.

Példa

Konvergens-e az $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ integrál?



Megoldás

A definíció szerint $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x^2} dx$, viszont a jobb oldali határértéken belül szereplő határozott integrált nem tudjuk közvetlenül kiszámolni. Ugyanakkor mivel $x \geq 1$ -re $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$, és

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e} - e^{-b} = \frac{1}{e},$$

a majoráns kritérium miatt az eredeti integrál is konvergens.

Állítás (Általános majoráns kritérium)

Legyenek f és g az $[a, \infty)$ intervallumon folytonos függvények, melyekre

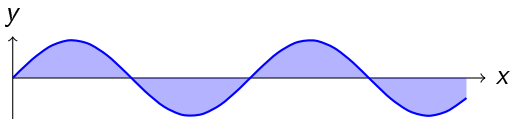
minden $x \geq a$ esetén $|f(x)| \leq g(x)$ teljesül. Ekkor ha $\int_a^{\infty} g(x) dx$

konvergens, akkor $\int_a^{\infty} f(x) dx$ is konvergens.

Példa

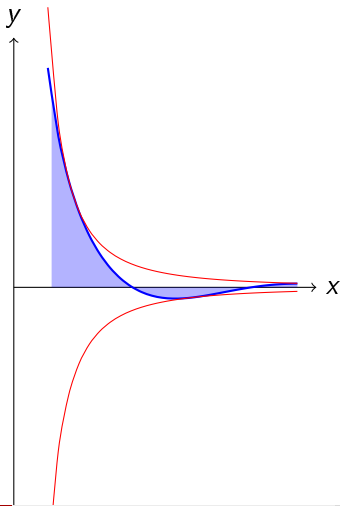
$\int_0^{\infty} \sin x \, dx$ divergens, bár az integrálfüggvény $I(b) = \int_0^b \sin x \, dx$

korlátos: $I(b)$ értéke 0 és $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$ között változik, de mindkettőt felveszi akármilyen nagy b -re is.



Példa

$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ konvergens, mert $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, és $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ konvergens.



Példa

Bizonyítsuk be, hogy az $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ konvergens.

Megoldás

A fv. a 0-nál nem korlátos, ezért két improprius integrál összegére bontjuk:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$$

$\left| \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \right| \leq x^{-3/2}$, és $\int_1^{\infty} x^{-3/2} dx$ konvergens, így $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ is az.

$[0, 1]$ -en $x^{-3/2}$ integrálja nem konvergens, ezért nem érdemes azzal

majorálni. Viszont tudjuk: $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1$, ezért $\left| \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ a $(0, 1]$ -en,

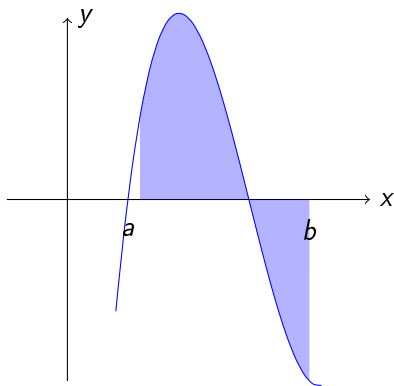
továbbá $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ konvergens, tehát $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ is konvergens.

Területszámítás

Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvény.

Az x tengely és $f(x)$ grafikonjának $[a, b]$ intervallumhoz tartozó része által

közrezárt terület $\int_a^b |f(x)| dx$.



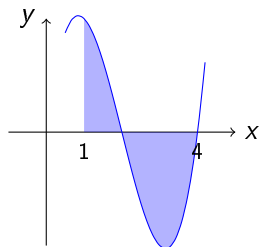
Példa

Számítsuk ki az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ függvény grafikonja és az x -tengely által közbezárt területet az $[1,4]$ intervallumon!

Az $f(x)$ folytonos fv. csak ott válthat előjelet, ahol 0:

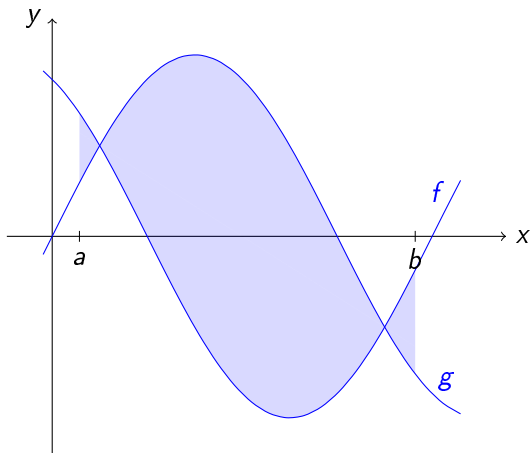
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8) = x(x - 2)(x - 4)$$

$\implies f$ zérushelyei 0, 2, 4. Így a terület $T = \int_1^4 |f(x)| dx =$



$$\begin{aligned} &= \left| \int_1^2 f(x) dx \right| + \left| \int_2^4 f(x) dx \right| = \\ &= \left| \int_1^2 x^3 - 6x^2 + 8x dx \right| + \left| \int_2^4 x^3 - 6x^2 + 8x dx \right| = \\ &= \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_1^2 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 \right| = \\ &= \left| 4 - \frac{9}{4} \right| + |0 - 4| = \frac{23}{4} \end{aligned}$$

Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvények. Cél: $f(x)$ és $g(x)$ grafikonja által közbezárt terület meghatározása az $[a, b]$ intervallumon.

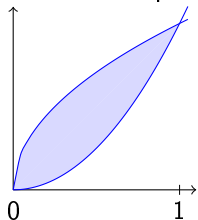


Vegyük észre, hogy ez a terület nem más, mint a $h(x) = f(x) - g(x)$ függvény grafikonja és az x -tengely által közbezárt terület az $[a, b]$ intervallumon.

Példa

Számítsuk ki az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = \sqrt{x}$ függvény által közbezárt korlátos síkrész területét!

A két grafikon $x = 0$ -ban és $x = 1$ -ben metszi egymást, így a szóban forgó terület nem más, mint a $h(x) = x^2 - \sqrt{x}$ függvény és az x -tengely által közbezárt terület a $[0, 1]$ intervallumon. Mivel ezen az intervallumon nincs több metszéspont (vagyis $h(x)$ -nek nincs gyöke), ez a terület:



$$\begin{aligned} T &= \left| \int_0^1 x^2 - \sqrt{x} \, dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 \right| = \\ &= \left| \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3/2} \right) - 0 \right| = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Függvény grafikonjának ívhossza

Állítás

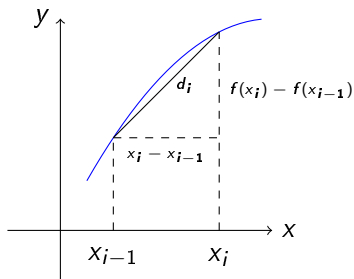
Legyen f olyan valós függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ intervallum minden pontjában, és a deriváltja folytonos $[a, b]$ -n. Ekkor f grafikonjának ívhossza az $[a, b]$ intervallumon

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Bizonyítás (vázlat)

Vegyük az $[a, b]$ intervallum egy $P : x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ felosztását. Minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon ($i=1, \dots, n$) a grafikon ívhosszát közelítsük a két végpontot összekötő szakasz hosszával.

Bizonyítás (vázlat - folytatás)



$$d_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}$$

Lagrange-féle középértéktétel: $\exists c_i \in (x_{i-1}, x_i)$

$$d_i = (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}$$

A teljes ívhossz közelítése így:

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + (f'(c_i))^2},$$

ami épp a szóban forgó integrál integrálközelítő összege.

Forgástest térfogata

Állítás

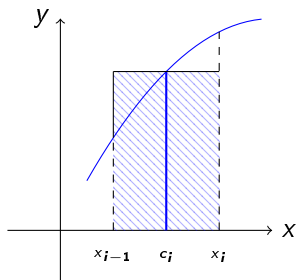
Legyen f az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvény. Ekkor az f függvény grafikonja $[a, b]$ -hez tartozó darabjának az x -tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

Bizonyítás (vázlat)

Vegyük az $[a, b]$ intervallum egy $P : x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ felosztását és egy ehhez tartozó $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ reprezentáns rendszert. Minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon ($i=1, \dots, n$) a forgástest megfelelő szeletének térfogatát közelítsük annak a hengernek a térfogatával, melynek magassága $x_i - x_{i-1}$ és alapkörének sugara $f(c_i)$.

Bizonyítás (vázlat - folytatás)



$$V_i = \pi f^2(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

A teljes térfogat közelítése így:

$$\sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \pi f^2(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

ami épp a szóban forgó integrál integrálközelítő összege.

Forgástest felszíne

Bizonyítás nélkül:

Állítás

Legyen f olyan valós függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ intervallum minden pontjában, és a deriváltja folytonos $[a, b]$ -n. Ekkor az f függvény grafikonja $[a, b]$ -hez tartozó darabjának az x -tengely körüli megforgatásával kapott test palástjának a felszíne

$$F = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Példa

Számítsuk ki az $f(x) = \operatorname{ch} x$ függvény grafikonjának ívhosszát a $[0, 1]$ intervallumon, és ugyanezen intervallumhoz tartozó darabjának megforgatásával kapott forgástest térfogatát és felszínét!

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (\operatorname{sh} x)^2} dx = \int_0^1 \operatorname{ch} x dx = [\operatorname{sh} x]_0^1 = \operatorname{sh} 1$$

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \int_0^1 \pi (\operatorname{ch} x)^2 dx = \int_0^1 \pi \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2} dx = \pi \left[\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} + \pi \frac{\operatorname{sh} 2}{4}$$

$$F = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^1 2\pi \operatorname{ch} x \sqrt{1 + (\operatorname{sh} x)^2} dx =$$

$$= \int_0^1 2\pi (\operatorname{ch} x)^2 dx = \pi + \pi \frac{\operatorname{sh} 2}{2}$$