Integrálási technikák

2015.11.18. és 2015.11.23.

1. Racionális törtfüggvények integrálása
   - Polinom + valódi törtfüggvény
   - Nevező faktorizálása
   - Parciális törtekre bontás
   - Elemi törtfüggvények integrálja
2. Fordított helyettesítés
3. Speciális helyettesítések
   - $R(e^x)$
   - $R(\sqrt[n]{x})$
   - $R(\cos x, \sin x)$
   - $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

Racionális törtfüggvények integrálása

- Polinom + valódi törtfüggvény alakra hozás.
- A nevező felbontása első és másodfokú tényezők szorzatára.
- Parciális törtekre bontás.
- A parciális törtek integrálása.

1. Polinom + valódi törtfüggvény

Definíció

Ha $f(x)$ és $g(x)$ két valós polinom és $\deg f < \deg g$, akkor $\dfrac{f(x)}{g(x)}$-et valódi törtfüggvénynek nevezzük.

Ha $\deg f \geq \deg g$, akkor f-et eloszthatjuk maradékosan g-vel:

$$f(x) = g(x)h(x) + m(x), \qquad \text{ahol } \deg m < \deg g,$$

és így

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{m(x)}{g(x)},$$

ahol $\dfrac{m(x)}{g(x)}$ már valódi törtfüggvény (vagy 0).

Példa

$$\frac{x^3-2}{x^4+2x^2+1} \text{ valódi,} \qquad \frac{x^4-2x+1}{x^2+x+1} \text{ nem valódi.}$$

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & (x^4 & & & -2x & +1) & : \quad (x^2+x+1) \quad = \quad x^2-x \\
- & (x^4 & +x^3 & +x^2) & & & \\
\hline
 & & -x^3 & -x^2 & -2x & +1 & \\
 & - & (-x^3 & -x^2 & -x) & & \\
\hline
 & & & & -x & +1 &
\end{array}$$

Így

$$\frac{x^4-2x+1}{x^2+x+1} = \underbrace{x^2-x}_{\text{polinom}} + \underbrace{\frac{-x+1}{x^2+x+1}}_{\text{valódi törtfv.}}$$

2. Nevező faktorizálása

Tétel

Minden legalább elsőfokú valós polinom felbontható első és másodfokú valós polinomok szorzatára.

Bizonyítás

Legyen $f(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ $(c_i \in \mathbb{R}\ \forall i)$ valós polinom. Az algebra alaptétele szerint f-nek van gyöke $\mathbb{C}$-ben:

$$\exists \alpha \in \mathbb{C}, \text{ hogy } f(\alpha) = 0.$$

Ekkor $x - \alpha$ kiemelhető: $f(x) = (x - \alpha)g(x)$.
Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, $g(x)$ is valós polinom, és tovább faktorizálhatjuk.

Bizonyítás (folytatás)

Ha $\alpha = a + bi$ nem valós, akkor

$$0 = f(\alpha) = c_n\alpha^n + \ldots + c_1\alpha + c_0$$

$$\Longrightarrow f(\overline{\alpha}) = c_n\overline{\alpha}^n + \ldots + c_1\overline{\alpha} + c_0 = \overline{c_n}\,\overline{\alpha^n} + \ldots + \overline{c_1}\,\overline{\alpha} + \overline{c_0} = \overline{f(\alpha)} = \overline{0} = 0,$$

tehát $\overline{\alpha}$ is gyöke f-nek.
De $\overline{\alpha} \neq \alpha \Rightarrow g(\overline{\alpha}) = 0 \Rightarrow f(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})h(x)$.
Viszont $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = (x-a-bi)(x-a+b_i) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ valós együtthatós, így $h(x)$ is valós. Ekkor egy másodfokú (valós gyök nélküli) valós polinomot emeltünk ki, és $h(x)$-et tovább faktorizálhatjuk.

3. Parciális törtekre bontás

A 2. lépésben a nevezőt faktorizálhatjuk úgy, hogy minden tényező főegyütthatója 1 legyen, és az azonosakat összevonjuk egy hatványba.

Az $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)}{(x-c_1)^{n_1}\cdots(x-c_r)^{n_r}(x^2+a_1x+b_1)^{m_1}\cdots(x^2+a_sx+b_s)^{m_s}}$

alakú valódi törtfüggvényt elemi törtfüggvények összegére bontjuk:

$\dfrac{A}{(x-c_i)^k}$ alakúakra, ahol $A \in \mathbb{R}$, $1 \le k \le n_i$, és

$\dfrac{Bx+C}{(x^2+a_ix+b_i)^k}$ alakúakra, ahol $B, C \in \mathbb{R}$, $1 \le k \le m_i$.

Tétel

Ilyen felbontás létezik, és egyértelmű.

A felbontás meghatározása:

- A szóbajövő elemi törtfüggvényeket a számlálóban ismeretlen együtthatókkal közös nevezőre hozzuk,
- a számlálót x hatványai szerint rendezzük,
- $f(x)$-szel összehasonlítva az ismeretlen együtthatókra kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk.

Példa

$$\frac{3x^2 - x + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+1) + Cx + D}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D)}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 3 \\ A + C &= -1 \\ B + D &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A = 0,\ B = 3,\ C = -1,\ D = -2.$$

Tehát

$$\frac{3x^2 - x + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{x^2+1} + \frac{-x-2}{(x^2+1)^2}.$$

Példa

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3+1}{x^4+2x^3+2x^2} = \frac{x^3+1}{x^2(x^2+2x+2)}$$

Ez a fv. valódi törtfv., mert a számláló foka (3) kisebb a nevezőénél (4), és a nevező nem bontható tovább, mert a másodfokú tényezőnek nincs valós gyöke.

$$\begin{aligned}
\frac{x^3+1}{x^2(x^2+2x+2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} \\
&= \frac{Ax(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+2x+2)} \\
&= \frac{(A+C)x^3 + (2A+B+D)x^2 + (2A+2B)x + 2B}{x^2(x^2+2x+2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A+C &= 1 \\
2A+B+D &= 0 \\
2A+2B &= 0 \\
2B &= 1
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{gathered}
A = -\tfrac{1}{2},\ B = \tfrac{1}{2},\ C = \tfrac{3}{2},\ D = \tfrac{1}{2} \\
\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{3x+1}{2(x^2+2x+1)}
\end{gathered}$$

4. Elemi törtfüggvények integrálja

- $$\int \frac{1}{(x-c)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{-n+1}(x-c)^{-n+1} + C, & \text{ha } n \neq 1 \\ \ln|x-c| + C, & \text{ha } n = 1 \end{cases}$$
- $$\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Ax+B}{(g(x))^n}\,\mathrm{d}x$$

  $Ax+B$ felbontható $A_1 \cdot g'(x) + B_1$ alakra:

$$Ax+B = \frac{A}{2}(2x+a) - \frac{Aa}{2} + B \implies A_1 = \frac{A}{2},\ B_1 = -\frac{Aa}{2} + B$$

$$\implies \int \frac{A_1 g'(x) + B_1}{(g(x))^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A_1 g'(x)}{(g(x))^n}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B_1}{(g(x))^n}\,\mathrm{d}x$$

Az első tagra:

$$\int \frac{A_1 \cdot g'(x)}{(g(x))^n}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} A_1 \cdot \frac{1}{-n+1} g(x)^{-n+1} + C, & \text{ha } n \neq 1 \\ A_1 \ln|g(x)| + C, & \text{ha } n = 1 \end{cases}$$

A második tagra: $\dfrac{B_1}{(x^2+ax+b)^n}$ teljes négyzetté való kiegészítéssel $\dfrac{B_2}{(u^2+1)^n}$ alakra hozható:

$$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}=\left(b-\frac{a^2}{4}\right)\left[\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\right)^2+1\right]$$

$$u=\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}},\qquad B_2=\left(b-\frac{a^2}{4}\right)^{-n}B_1$$

Megjegyzés

Minthogy x^2+ax+b-nek nincs valós gyöke, a diszkriminánsa, a^2-4b negatív, és így $\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}$ értelmezve van.

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^n}\,\mathrm{d}u = ?$$

$n = 1$-re $\operatorname{arctg} u + C$

$n = 2$-re:

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{u^2+1-u^2}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$\int \frac{1}{u^2+1} - \frac{u^2}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u - \int \frac{u^2}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u$$

.

A második tagot parciálisan integráljuk:

$$\int \frac{u^2}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{2}u \cdot \frac{2u}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}u\frac{1}{u^2+1} + \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u.$$

Összesítve:

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u - \left(-\frac{1}{2}u\frac{1}{u^2+1} + \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{u^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + C$$

.

Ha $n > 2$, akkor az $\int \frac{1}{(u^2+1)^n}\,\mathrm{d}u$ integrált ugyanezzel a módszerrel vissza lehet vezetni az $\frac{1}{(u^2+1)^{n-1}}$ integráljára.

Példa

$$\int \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - 3x - 2}\,\mathrm{d}x = ?$$

1. Nem valódi törtfüggvény, tehát szükség van a maradékos osztásra.

$$\begin{array}{rccccccccc} & (3x^3 & -2x^2 & +x & &) & : & (x^3 - 3x - 2) & = & 3 \\ - & (3x^3 & & -9x & -6 &) & & & & \\ \hline & & -2x^2 & +10x & +6 & & & & & \end{array}$$

$$\frac{3x^3 - 2x^2 + 5x}{x^3 - 3x - 2} = 3 + \frac{-2x^2 + 10x + 6}{x^3 - 3x - 2}$$

2. $x^3 - 3x - 2$ felbontásához a lehetséges racionális gyökök: $\frac{p}{q}$, ahol p osztója 2-nek, q osztója 1-nek $\Rightarrow \frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2$. A -1 gyök, és Horner-módszerrel való kiemeléssel:
$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2) = (x+1)^2(x-2)$.

3. Parciális törtekre bontás:

$$\begin{aligned}\frac{-2x^2+10x+6}{(x+1)^2(x-2)} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-2}\\ &= \frac{A(x^2-x-2)+B(x-2)+C(x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x-2)}\\ &= \frac{(A+C)x^2+(-A+B+2C)x+(-2A-2B+C)}{(x+1)^2(x-2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A+C &= -2\\ -A+B+2C &= 10 \quad\Rightarrow\quad A=-4,\ B=2,\ C=2\\ -2A-2B+C &= 6\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{-2x^2+10x+6}{x^3-3x-2} = -\frac{4}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{x-2}.$$

4. Az integrál kiszámítása: $\displaystyle\int 3-\frac{4}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x =$

$$3x-4\ln|x+1|-\frac{2}{x+1}+2\ln|x-2|+C.$$

Még egy trükk a parciális törtekre bontásnál: a letakarásos módszer

Ha a nevező csupa különböző gyöktényező szorzata:
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)}{(x-c_1)\cdots(x-c_r)}$, akkor az $\dfrac{A_1}{x-c_1} + \cdots + \dfrac{A_r}{x-c_r}$ felbontásban az A_i együtthatót megkaphatjuk úgy, hogy az $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ törtben eltöröljük az $(x-c_i)$ tényezőt, és behelyettesítünk c_i-t.

Példa

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}, \quad \text{ahol}$$

$$A = \left.\frac{2x-1}{x-2}\right|_{x=1} = \frac{1}{-1} = -1 \text{ és } B = \left.\frac{2x-1}{x-1}\right|_{x=2} = \frac{3}{1} = 3.$$

Fordított helyettesítés

Tétel

Legyen g invertálható, differenciálható fv., amelynek értékkészlete tartalmazza az I intervallumot, és jelölje g^{-1} a g inverzét. Ekkor az I intervallumon érvényes $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ integrálra

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u,$$

és $a, b \in I$-re

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Bizonyítás

A g invertálhatósága miatt $x = g(g^{-1}(x))$ az I-n, és az $f(x) = f(g(g^{-1}(x)))$ függvény integráljára elvégezhetjük a $g^{-1}(x) = u$, $\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ helyettesítést:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(g^{-1}(x)))\,\mathrm{d}x =$$

$$\int f(g(g^{-1}(x)))g'(g^{-1}(x))\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}\,\mathrm{d}x = \int f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Megjegyzés

Egy helyettesítés és fordított helyettesítés kombinálásával az

$$\int f(h(x))h'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u$$

átalakítást is alkalmazhatjuk.

Speciális helyettesítések. $R(e^x)$

Jelöljön $R(f_1, \ldots, f_n)$ olyan függvényt, amit az $f_1, \ldots, f_n$ függvényekből a négy alapművelet segítségével alkottunk (azaz az $f_1, \ldots, f_n$ racionális kifejezése).
Az $R(e^x)$ függvény integrálját $e^x = u$, azaz $x = \ln u$ helyettesítéssel racionális függvény integráljává alakíthatjuk: $\int R(e^x)\,\mathrm{d}x = \int R(u)\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Példa

$\int \frac{1}{3+4\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3+2e^x-2e^{-x}}\,\mathrm{d}x$. Az $e^x = u$ helyettesítéssel

$$= \int \frac{1}{3+2u-2u^{-1}} \cdot \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{2u^2+3u-2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{2(u-\frac{1}{2})(u+2)} =$$

$$\int \frac{A}{u-\frac{1}{2}} + \frac{B}{u+2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{\frac{1}{5}}{u-\frac{1}{2}} + \frac{-\frac{1}{5}}{u+2}\,\mathrm{d}u =$$

$$\frac{1}{5}\ln\left|u-\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{5}\ln|u+2| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{e^x-\frac{1}{2}}{e^x+2}\right| + C.$$

$R(\sqrt[n]{x})$

Az $\sqrt[n]{x} = u$, azaz $x = u^n$, és $\mathrm{d}x = nu^{n-1}\,\mathrm{d}u$ helyettesítés:

$$\int R(\sqrt[n]{x})\,\mathrm{d}x = \int R(u)nu^{n-1}\,\mathrm{d}u,$$

(ahol páros n esetén $x \geq 0$) racionális törtfüggvényt ad.

Példa

$\displaystyle\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$ a $\sqrt[4]{x} = u$, azaz $x = u^4$ és $\mathrm{d}x = 4u^3\,\mathrm{d}u$ helyettesítéssel:

$$\int \frac{u^4 \cdot u^2}{u^2 - u} \cdot 4u^3\,\mathrm{d}u = \int \frac{4u^8}{u-1}\,\mathrm{d}u.$$

$R(\cos x, \sin x)$

$\cos x$ és $\sin x$ is racionális kifejezése $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$-nek:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Így a $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = u$, azaz $x = 2 \operatorname{arctg} u$ és $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{u^2 + 1} \mathrm{d}u$ helyettesítéssel

$$\int R(\cos x, \sin x) \, \mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \frac{2u}{1 + u^2}\right) \frac{2}{1 + u^2} \, \mathrm{d}u$$

Példa

$$\int \frac{1}{\sin x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1 + u^2}{2u} \cdot \frac{2}{1 + u^2} \, \mathrm{d}u = \int \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u = \ln |u| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

A $\sqrt{ax^2+bx+c}$ függvényt – ha van olyan intervallum, ahol értelmezve van – teljes négyzetté való kiegészítéssel $A\cdot\sqrt{u^2+1}$, $A\cdot\sqrt{u^2-1}$ vagy $A\cdot\sqrt{1-u^2}$ alakra hozhatjuk, ahol u lineáris függvénye x-nek. Így elegendő az

$$R(u, \sqrt{u^2+1}), \quad R(u, \sqrt{u^2-1}), \quad \text{illetve az} \quad R(u, \sqrt{1-u^2})$$

alakú integrálokkal foglalkozni. Ezeket az
$u = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel $\displaystyle\int R(u, \sqrt{u^2+1})\,\mathrm{d}u = \int R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$,
$u = \operatorname{ch} t$ helyettesítéssel $\displaystyle\int R(u, \sqrt{u^2-1})\,\mathrm{d}u = \int R(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t$,
illetve az
$u = \sin t$ helyettesítéssel $\displaystyle\int R(u, \sqrt{1-u^2})\,\mathrm{d}u = \int R(\sin t, \cos t)\cos t\,\mathrm{d}t$
alakra hozhatjuk.

Megjegyzés

Az előbbi helyettesítéseknél valójában az $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t\big|_{[0,+\infty)}$ és $\sin t\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ invertálható függvényeket használjuk.

Példa

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u = \int \operatorname{ch}^2 u\,\mathrm{d}u =$$
$$\int \frac{1+\operatorname{ch}(2u)}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2u) + C = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + C =$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{arsh} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C$$