

Inverz függvények

2015.10.14.

- 1 Az inverz függvény fogalma
- 2 Szig. monoton függvények inverze
- 3 Az inverz függvény tulajdonságai
- 4 Elemi függvények inverzei
- 5 Összefoglalás

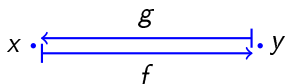
Definíció

Az f valós függvény **invertálható**, ha injektív, azaz $x, y \in D(f)$, $x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$.

- f grafikonját tekintve ez azt jelenti, hogy a grafikon minden vízszintes egyenest legfeljebb 1 pontban metsz.

Definíció

Invertálható f függvény esetén g az f **inverze**, ha g értelmezési tartománya ($D(g)$) megegyezik f értékkészletével ($R(f)$), és $f(x) = y$ esetén $g(y) = x$.



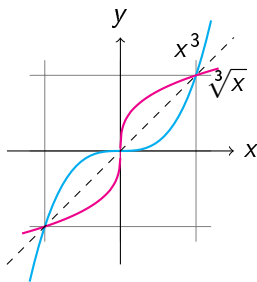
- A grafikonok szempontjából ez azt jelenti, hogy f és g grafikonja egymás tükörképe az $y = x$ egyenesre nézve.
- g pontosan akkor inverze f -nek, ha f inverze g -nek.

Tétel

Ha f és g valós függvények, akkor g pontosan akkor inverze f -nek, ha $\forall x \in D(f) \ g(f(x)) = x$ és $\forall y \in D(g) \ f(g(y)) = y$.

Példa

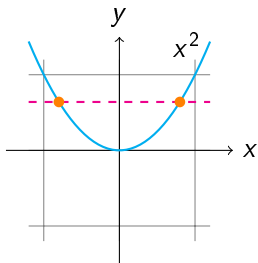
$f(x) = x^3$ inverze $g(x) = \sqrt[3]{x}$, hisz $x \in \mathbb{R}$ esetén $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ és $\sqrt[3]{x^3} = x$.



Példa

$f(x) = x^2$ -nek nem inverze $g(x) = \sqrt{x}$, mert bár $x \in D(g) = [0, \infty)$ esetén $(\sqrt{x})^2 = x$, de ha $x \in \mathbb{R}$ akkor $\sqrt{x^2} = |x|$, és $x < 0$ -ra ez nem egyezik meg x -szel.

$f(x) = x^2$ igazából nem is invertálható, hiszen nem injektív ($x^2 = (-x)^2$).



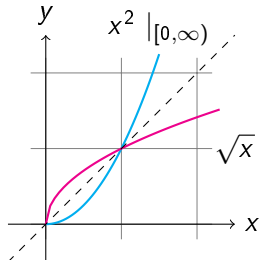
Mi ilyenkor a teendő? \implies Szorítsuk meg a függvényt egy olyan halmazra, ahol invertálható!

Definíció

Legyen f egy valós függvény. $H \subseteq D(f)$ esetén f **megszorítása** H -ra (jel.: $f|_H$) az a h függvény, amelyre $D(h) = H$ és $\forall x \in H$ $h(x) = f(x)$.

Példa

$f(x) = x^2|_{[0, \infty)}$ invertálható, és inverze $g(x) = \sqrt{x}$.



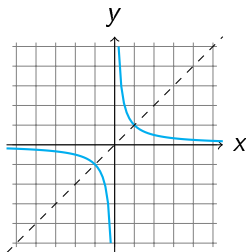
Szig. monoton függvények inverze

Állítás

Ha az f valós függvény szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő, akkor invertálható.

Megjegyzés

Az állítás megfordítása nem igaz, pl. $f(x) = \frac{1}{x}$ invertálható, és inverze önmaga, de mégsem szigorúan monoton az értelmezési tartományán.

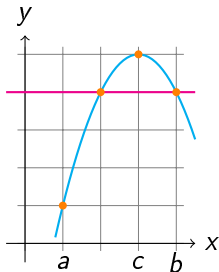


Tétel

Ha az f valós függvény folytonos és invertálható az I intervallumon, akkor f szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $a, b \in I$ és $a < c < b$, akkor $f(a) < f(c) < f(b)$ vagy $f(a) > f(c) > f(b)$, ellenkező esetben a Bolzano-Darboux-tétel miatt f nem lehetne invertálható.



Bizonyítás (folytatás)

Ha $a, b \in I$ és $a < c < d < b$, akkor $f(a) < f(b)$ esetén $f(c) < f(d)$ (és $f(a) > f(b)$ esetén $f(c) > f(d)$), ellenkező esetben az előző pontot alkalmazva a -ra és d -re ellentmondásra jutnánk, hisz pl. az első esetben $f(a), f(d) \leq f(c)$ lenne.

Ez viszont azt jelenti, hogy minden I -beli zárt intervallumon a végpontoknak megfelelően a függvény vagy szigorúan monoton növekvő, vagy szigorúan monoton csökkenő, és így a teljes I intervallumon is szigorúan monoton.

Következmény

Ha egy folytonos függvényt szeretnénk invertálni, akkor olyan maximális intervallumra kell megszorítani, ahol szigorúan monoton.

Az inverz függvény tulajdonságai

Tétel

Legyen f egy invertálható valós függvény, melynek inverze g . Ekkor:

- 1 $D(g) = R(f)$, $D(f) = R(g)$
- 2 Ha f szigorúan monoton növe (csökkenő), akkor g is szigorúan monoton növe (csökkenő).
- 3 Ha f folytonos, akkor g is folytonos.

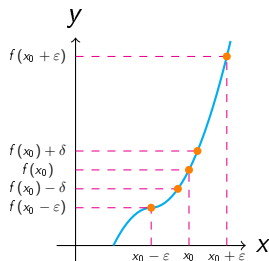
Bizonyítás

1. Volt korábban.
- 2.

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_1 & < & x_2 & \iff & f(x_1) & < & f(x_2) \\
 g(y_1) & < & g(y_2) & \iff & y_1 & < & y_2
 \end{array}$$

Bizonyítás (folytatás)

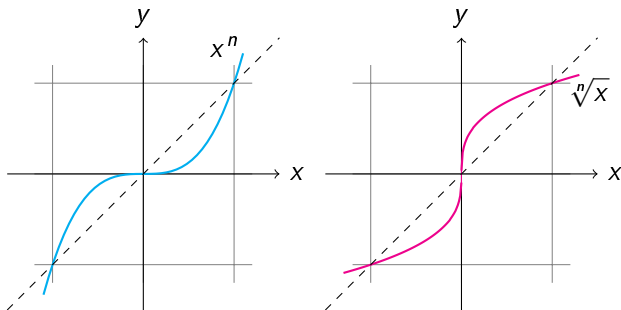
3. f invertálható és folytonos \implies szigorúan monoton. Legyen pl. szigorúan monoton növekvő és vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -t.



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta) \subseteq (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$$

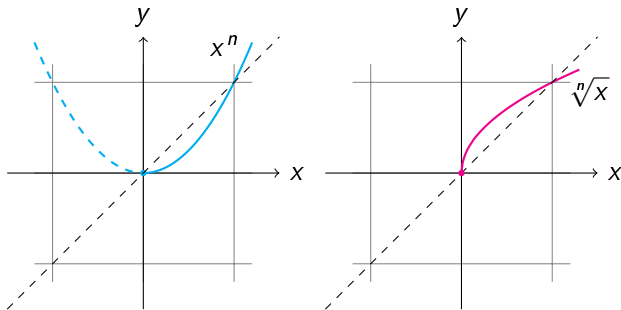
Hatványfüggvények inverzei - gyökfüggvények

$f(x) = x^n$, n pozitív páratlan egész \implies invertálható és inverze $g(x) = \sqrt[n]{x}$



$$D(f) = R(g) = \mathbb{R} \quad D(g) = R(f) = \mathbb{R}$$

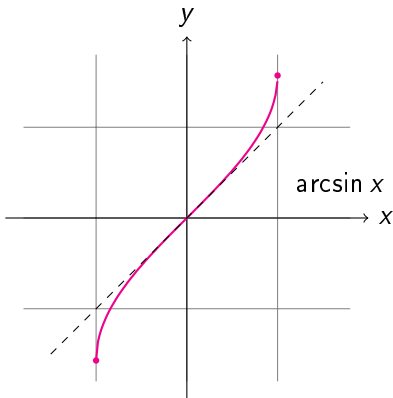
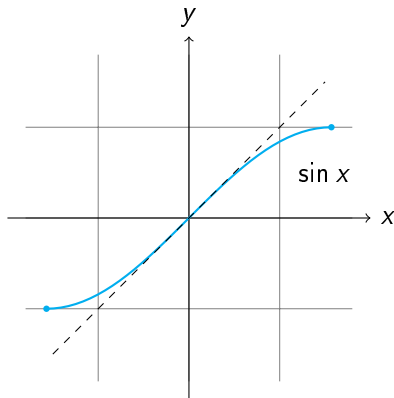
$f(x) = x^n$, n pozitív páros egész $\implies f|_{[0, \infty)}$ invertálható és inverze
 $g(x) = \sqrt[n]{x}$



$$D(f|_{[0, \infty)}) = R(g) = [0, \infty) \quad D(g) = R(f|_{[0, \infty)}) = [0, \infty)$$

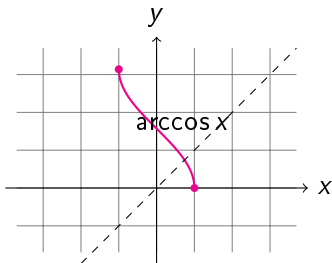
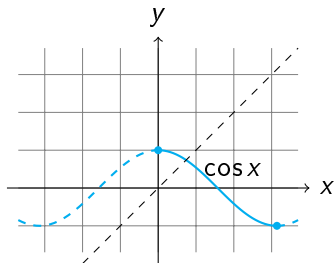
Trigonometrikus függvények inverzei - arkusz függvények

$f(x) = \sin x \implies f \mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ invertálható és inverze $g(x) = \arcsin x$



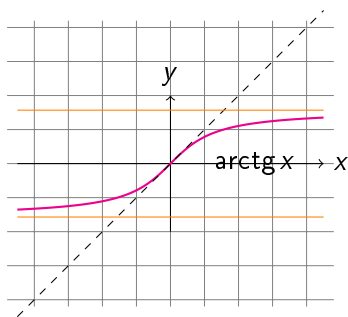
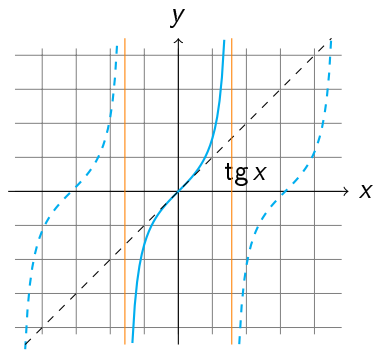
$$D(f \mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}) = R(g) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad D(g) = R(f \mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}) = [-1, 1]$$

$f(x) = \cos x \implies f|_{[0, \pi]}$ invertálható és inverze $g(x) = \arccos x$



$$D(f|_{[0, \pi]}) = R(g) = [0, \pi] \quad D(g) = R(f|_{[0, \pi]}) = [-1, 1]$$

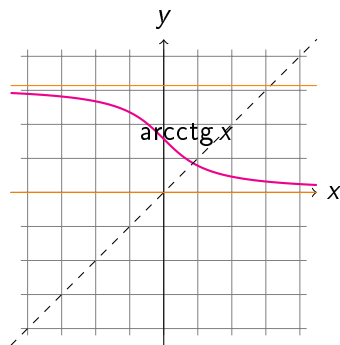
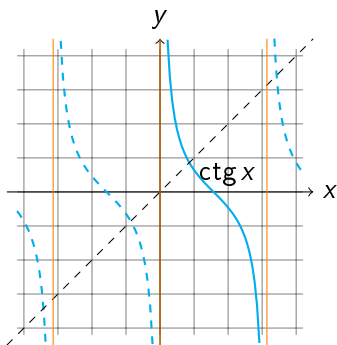
$f(x) = \operatorname{tg} x \implies f \mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ invertálható és inverze $g(x) = \operatorname{arctg} x$



$$D(f \mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}) = R(g) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad D(g) = R(f \mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}) = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$f(x) = \operatorname{ctg} x \implies f|_{[0, \pi]}$ invertálható és inverze $g(x) = \operatorname{arcctg} x$

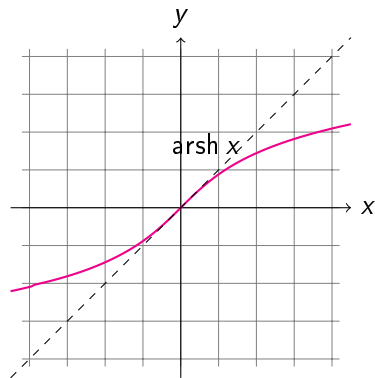
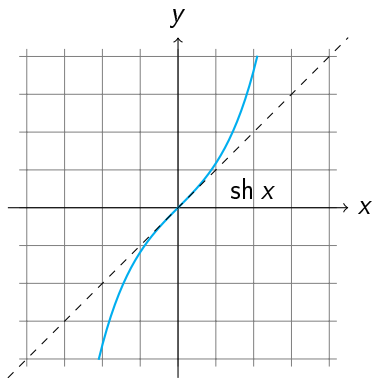


$$D(f|_{[0, \pi]}) = R(g) = [0, \pi] \quad D(g) = R(f|_{[0, \pi]}) = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arcctg} x = 0$$

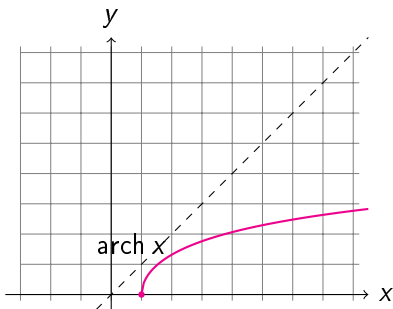
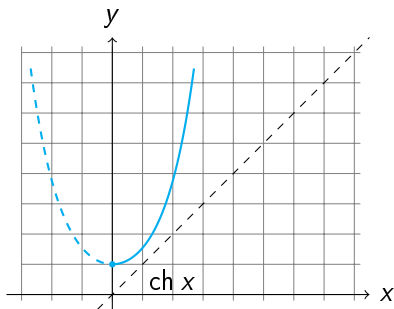
Hiperbolikus függvények inverzei - area függvények

$f(x) = \operatorname{sh} x \implies f$ invertálható és inverze $g(x) = \operatorname{arsh} x$



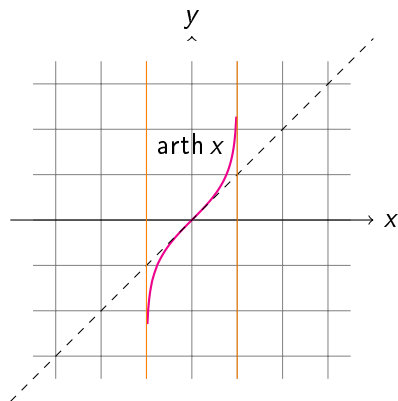
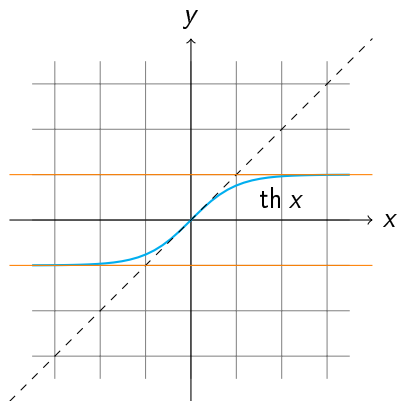
$$D(f) = R(g) = \mathbb{R} \quad D(g) = R(f) = \mathbb{R}$$

$f(x) = \operatorname{ch} x \implies f|_{[0, \infty)}$ invertálható és inverze $g(x) = \operatorname{arch} x$



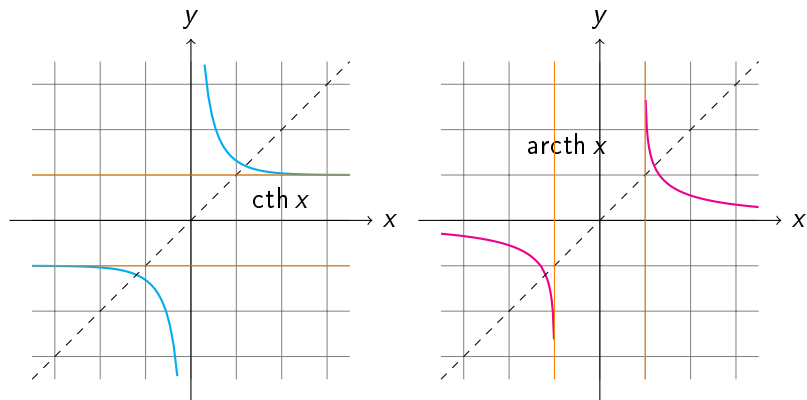
$$D(f|_{[0, \infty)}) = R(g) = [0, \infty) \quad D(g) = R(f|_{[0, \infty)}) = [1, \infty)$$

$f(x) = \operatorname{th} x \implies f$ invertálható és inverze $g(x) = \operatorname{arth} x$



$$D(f) = R(g) = \mathbb{R} \quad D(g) = R(f) = (-1, 1)$$

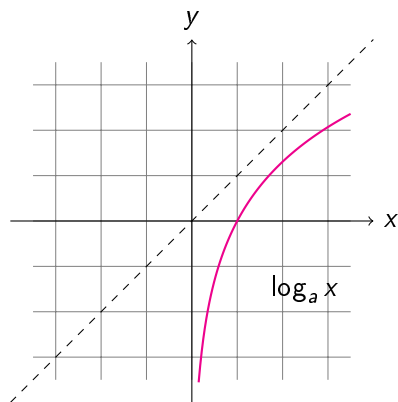
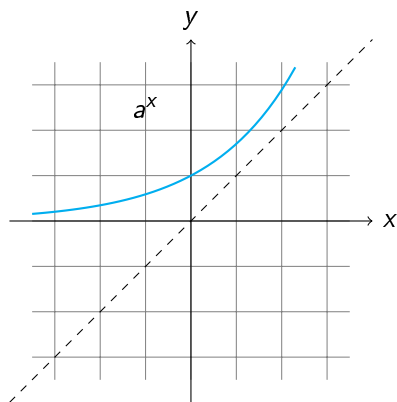
$f(x) = \operatorname{cth} x \implies f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ invertálható és inverze $g(x) = \operatorname{arcth} x$



$$D(f) = R(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad D(g) = R(f) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

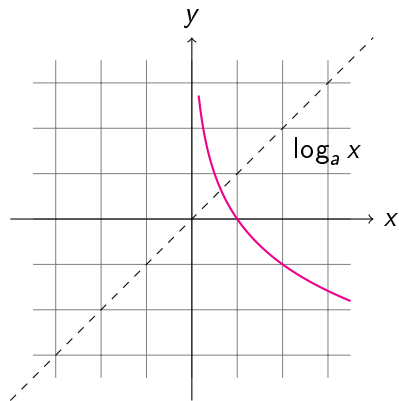
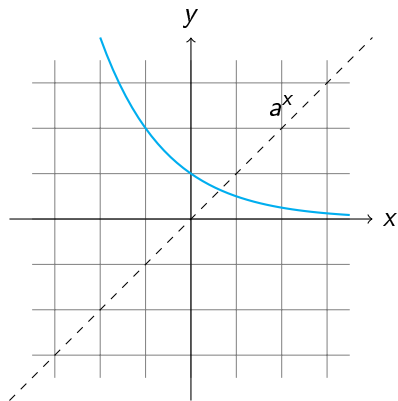
Exponenciális függvények inverzei - logaritmusfüggvények

$f(x) = a^x$, $1 < a \implies f$ invertálható és inverze $g(x) = \log_a x$



$$D(f) = R(g) = \mathbb{R} \quad D(g) = R(f) = (0, \infty)$$

$f(x) = a^x, 0 < a < 1 \implies f$ invertálható és inverze $g(x) = \log_a x$



$$D(f) = R(g) = \mathbb{R} \quad D(g) = R(f) = (0, \infty)$$

A logaritmusfüggvények tulajdonságai

Speciális eset a természetes alapú logaritmus:

$$\log_e x = \ln x$$

Megjegyzés

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Ezt az azonosságot jól lehet használni $f(x)^{g(x)}$ alakú függvények határértékének meghatározásakor:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow c} g(x) \ln f(x)},$$

mivel az e^x függvény folytonos.

Állítás (A logaritmusfüggvények azonosságai)

Legyen $1 \neq a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ és $x, y > 0$. Ekkor:

- ① $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- ② $\log_a x^b = b \log_a x$
- ③ $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Bizonyítás

- ① $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$
- ② $a^{b \log_a x} = (a^{\log_a x})^b = x^b$
- ③ $a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\ln a \frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\ln x} = x$

Összefoglalás

- Az inverz függvény fogalma
- Szig. monoton függvények inverze
- Elemi függvények inverzei (gyök, arkusz és area függvények)
- A logaritmusfüggvény és tulajdonságai