Komplex számok

Wettl Ferenc előadása alapján

2015.09.23.

1. Számok
   - A számfogalom bővülése
2. Számolás komplex számokkal
   - Algebrai alak
   - Trigonometrikus alak
   - Egységgyökök
   - Gyökvonás trigonometrikus alakban
3. Az algebra alaptétele
4. Összefoglalás

- pozitív egészek – összeadás, szorzás
- $a + x = b$ megoldhatósága $\to$ negatív számok és 0
- $ax = b$ megoldhatósága $\to$ racionális számok
- $x^2 = 2$ megoldása $\to$ vannak nem racionális számok is
- sorozatok határértékének fogalma $\to$ irracionális számok
- racionális + irracionális számok $\to$ valós számok
- és mi van az $x^2 = -1$ egyenlet megoldhatóságával? Szükség van további bővítésre?
- Cardano képlete a harmadfokú egyenlet megoldására (1545-ből): $x^3 + px + q = 0$ megoldása: $x = u - \frac{p}{3u}$, ahol

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Akkor is kellhet negatív számból négyzetgyököt vonni, ha valósak a megoldások.

Jelölés

$i = \sqrt{-1}$ imaginárius egység (imaginárius = nem valódi)

Definíció (komplex szám algebrai alakja)

Az $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ alakú kifejezéseket komplex számoknak nevezzük, ahol i az a szám, melyre $i^2 = -1$.

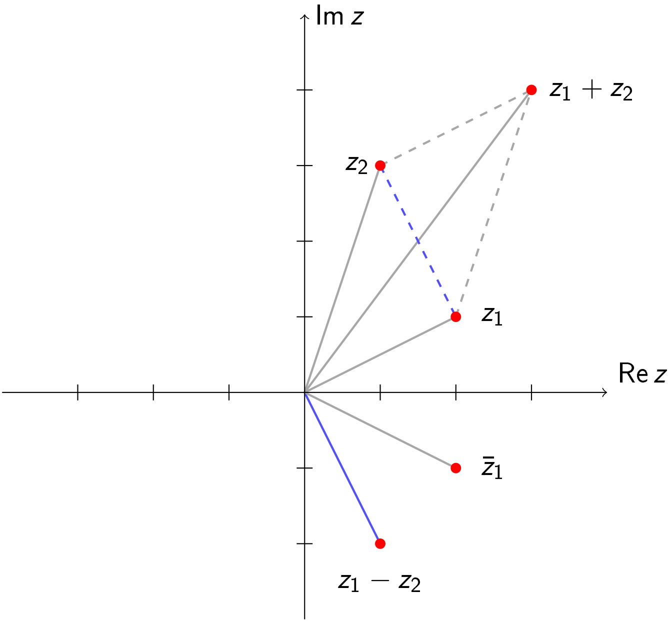
$a + bi = c + di \iff a = c$ és $b = d$.

A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$ jelöli.

Egy komplex szám több alakban is felírható, ezt az alakot algebrai alaknak nevezzük. Az a szám a z valós része, a b az imaginárius, jelölése: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Definíció (konjugált)

$\bar{z} = a - ib$, ahol $z = a + ib$


Im z
$z_1 + z_2$
z_2
z_1
Re z
$\bar{z}_1$
$z_1 - z_2$

Műveletek algebrai alakban:

- $z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$
- összeadás, kivonás, szorzás algebrai kifejezésként az $i^2 = -1$ helyettesítést használva.
  $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
  $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
  $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
- osztás a nevező konjugáltjával való bővítéssel.
  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$
  $$\frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

Példa

$(2+3i)-(3-i) = \ -1+4i$

$(2+3i)(3-i) = 2\cdot 3 + 3i(-i) + (3i)\cdot 3 + 2\cdot(-i) = 9+7i$

$\frac{1}{i} = \ -i$

$$\frac{2+3i}{3+i} = \frac{(2+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{9+7i}{10} = \frac{9}{10} + \frac{7}{10}i$$

Tétel (Konjugált tulajdonságai)

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$
4. $\bar{\bar{z}} = z$

Tétel

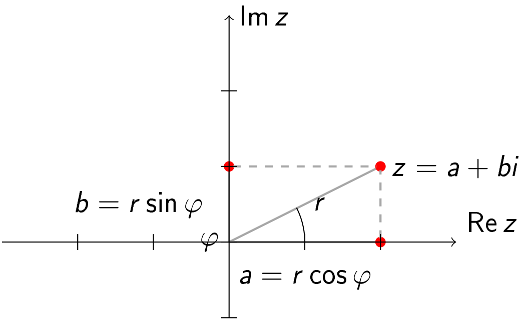
$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$, azaz
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

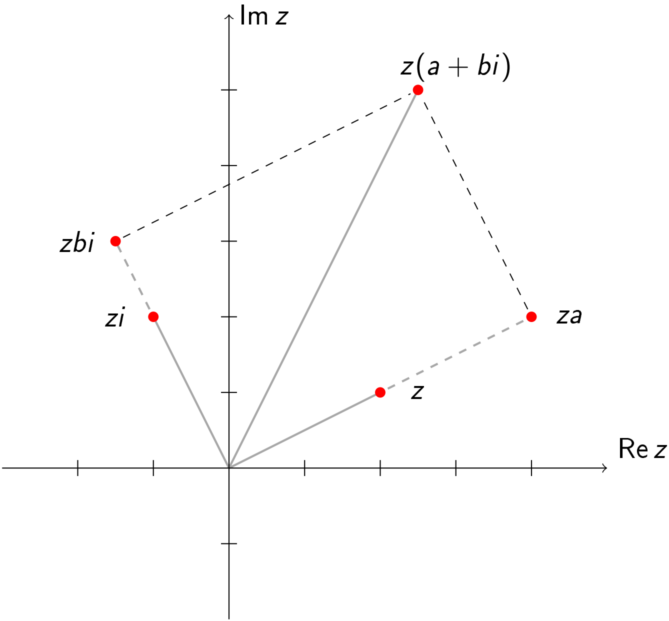
Tétel (Abszolút érték tulajdonságai)

1. $|\bar{z}| = |z|$
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
3. $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Definíció

Az (a, b) vektor pozitív x-tengellyel bezárt szöge pozitív irányban legyen φ, a vektor hossza hossza r. Ekkor a $z = a + bi$ komplex szám felírható $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ alakban is, hisz $a = r\cos\varphi$, és $b = r\sin\varphi$. Ezt az alakot trigonometrikus alaknak, az r nemnegatív valóst a komplex szám abszolút értékének, φ-t argumentumának nevezzük: $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.





$\operatorname{Im} z$
$z(a+bi)$
zbi
zi
za
z
$\operatorname{Re} z$

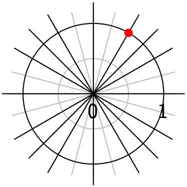
Műveletek trigonometrikus alakban:

- $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$
- $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
- $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Példa

$[2(cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})][\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}] =$
$2\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}) + 2\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6})i = 2\cos\frac{3\pi}{2} + 2\sin\frac{3\pi}{2}i = -2i.$

Ellenőrzés: $(1 + \sqrt{3}i)(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i^2 - \frac{i}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i = -2i.$



Példa

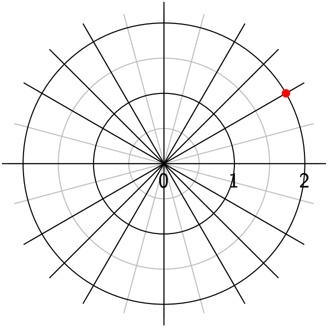
Számítsuk ki

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}$$

értékét!

Megoldás

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ trigonometrikus alakja: $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.
$[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}]^{100}=\cos\frac{100\pi}{3}+i\sin\frac{100\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.



Példa

Számítsuk ki

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^9$$

értékét!

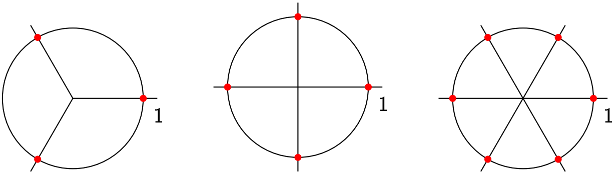
Megoldás

$\sqrt{3}+i$ hossza $\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$, trigonometrikus alakja: $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$.
$[2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})]^9=2^9(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6})=512(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})=-512i$

Definíció

Az 1 n-edik gyökeit, azaz azokat a számokat, amelyeknek az n-edik hatványa 1, n-edik *egységgyököknek* nevezzük.

Az 1 négyzetgyökei a komplexek körében: 1 és -1.
Az 1 harmadik gyökei: 1, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
Az 1 negyedik gyökei: 1, i, -1, $-i$.
Az 1 hatodik gyökei: 1, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, -1, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.



Példa

Számítsuk ki a hatodik egységgyököket!

Megoldás

Az 1 trigonometrikus alakja $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$. Olyan számokat keresünk, melyek 6-odik hatványa 1, azaz olyanokat, melyekre $r^6(\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$. Innen $r = 1$, és $6\varphi = 0$, de mivel 0 ugyanaz a szög, mint 2π, $4\pi \ldots$, ezért $6\varphi = 2\pi$, $6\varphi = 4\pi$, $6\varphi = 6\pi$, $6\varphi = 8\pi$, $6\varphi = 10\pi$ is lehet! Innen $\varphi = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$. A gyökök tehát:

$1(\cos 0 + i \sin 0) = 1$,

$1(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$,

$1(\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$,

$1(\cos \pi + i \sin \pi) = -1$,

$1(\cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$,

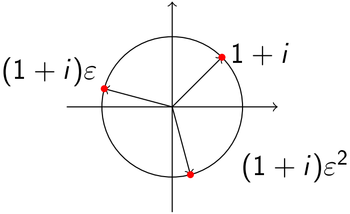
$1(\cos 5\pi/3 + i \sin 5\pi/3) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Tétel (Komplex szám n-edik gyöke)

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\text{ahol}$$
$k = 0, 1, \ldots n-1.$

Példa

Számítsuk ki a $-1+i$ összes köbgyökét!



Megoldás

$-2+2i = \sqrt{8}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ harmadik gyökei
$\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{2\pi}{3}))$ $(k = 0, 1, 2)$, azaz
$1+i$, $(1+i)\varepsilon$, $(1+i)\varepsilon^2$, ahol $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ harmadik egységgyök.

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak.

Tétel (Algebra alaptétele)

Minden komplex-együtthatós n-edfokú ($n \geq 1$) polinomnak van komplex gyöke.

Tétel (Algebra alaptétele – változat)

Minden komplex-együtthatós n-edfokú ($n \geq 1$) polinomnak pontosan n gyöke van, ha a gyököket multiplicitással számoljuk. Másként fogalmazva minden komplex-együtthatós polinom lineáris tényezők szorzatára bontható. Nevezetesen az

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

egyenlethez léteznek olyan $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ számok, hogy

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n),$$

és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Összefoglalás

- komplex számok algebrai és trigonometrikus alakja
- nevezetes szögek esetén konverzió a két alak közt
- algebrai alakban megadott komplex számok összeadása, kivonása, szorzása, osztása
- trigonometrikus alakban megadott komplex számok szorzása, osztása, hatványozása
- konjugált és abszolút érték tulajdonságai
- gyökvonás trigonometrikus alakban
- komplex egységgyökök
- az algebra alaptétele a komplex gyökök számáról