Sorozatok

2015.11.30. és 2015.12.02.

Sorozatok alapfogalmai

Definíció

Egy valós sorozat egy $\mathbb{N}$-ből $\mathbb{R}$-be képező függvény. Értelmezési tartománya többnyire $\mathbb{N}$ vagy $\mathbb{N}^+$. Jelölés: $a(n)$ helyett általában a_n, pl. $a_1, a_2, a_3, \dots$ vagy $a_0, a_1, a_2, \dots$ megadja mindegyik elem képét.

Sorozat megadása

- Az első néhány tag felsorolásával (ha abból ki lehet találni, mire gondolunk), pl. $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ a pozitív páratlan számok.
- n-től függő képlettel, pl. $a_n = n + \sqrt{n^2 - 2}$, $n \geq 2$
- Rekurzióval, pl.: a Fibonacci-sorozat: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, ha $n \geq 2 \Rightarrow 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

Jelölés: a_n $(n = 1, 2, \dots)$ vagy $[a_n]$ vagy $[a_n]_{n \in \mathbb{N}}$.

Sorozatok jellemzői

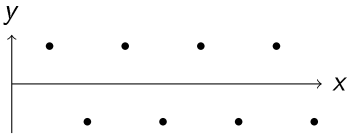
Definíció

Egy $[a_n]$ sorozat

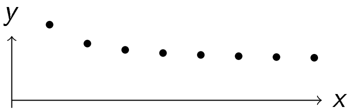
- monoton növő, ha $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$
- szigorúan monoton növő, ha $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$
- monoton fogyó (csökkenő), ha $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$
- szigorúan monoton fogyó (csökkenő), ha $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$
- korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R}$: $|a_n| \leq K$ $\forall n$

Példa

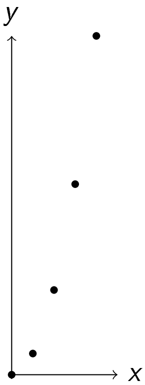
A $(-1)^n$ sorozat korlátos, de nem monoton.



Az $1 + \dfrac{1}{n}$ sorozat szigorúan monoton fogyó, és korlátos.



Az $a_n = n^2$ sorozat szigorúan monoton növő, nem korlátos.



Sorozatok határértéke

Definíció

Egy $[a_n]$ sorozat határértéke (limesze): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall\varepsilon\ \exists n_0 :\ (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon),$$

azaz a_n tetszőlegesen közel kerül A-hoz, ha n elég nagy.

Definíció

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}, \text{ ha } \ \forall K\ \exists n_0\text{:}\ \left(n \geq n_0 \Rightarrow \begin{array}{c} a_n > K \\ a_n < K \end{array} \right),$$

azaz a_n tetszőlegesen nagy (kicsi), ha n elég nagy.

Definíció

Az $[a_n]$ sorozat konvergens, ha véges határértéke van, és divergens, ha nem konvergens.

Tétel

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} A \\ \infty \\ -\infty \end{cases} \iff \text{minden} \begin{cases} (A-\varepsilon, A+\varepsilon) \\ (K,\infty) \\ (-\infty, K) \end{cases} \text{intervallumon kívül}$$

a sorozatnak csak véges sok (indexű) eleme van.

Bizonyítás

Nyilvánvalóan ekvivalens, hogy valamely n_0-tól benne vannak a sorozat tagjai egy I intervallumban, illetve, hogy csak véges sok (indexű) tag van rajta kívül.

Pl. Az $1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$ sorozatnak nem limesze az 1, mert az $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ intervallumon kívül végtelen sok (2 értékű) eleme van a sorozatnak. Könnyen látható, hogy ez a sorozat korlátos, de divergens.

Sorozatok limeszére ugyanúgy érvényesek a műveleti tulajdonságok (a kiterjesztett $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ aritmetikával), és a rendőrelv, mint a függvények határértékére.

Tétel (Átviteli elv)

Legyen f valós függvény, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{minden } x_n \text{ valós sorozatra} \\ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \alpha \text{ esetén } \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \beta. \end{array}$$

Példa

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, mert $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{L'H(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$ igaz a megfelelő függvény limeszére.

Az integrál definíciója sorozatokkal:

Az $[a, b]$ intervallumon korlátos $f(x)$ függvény akkor és csak akkor integrálható $[a, b]$-n, és integrálja I, ha minden $[P_n]$ felosztássorozatra a reprezentánsrendszerek tetszőleges választása mellett

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n\| \to 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} I_{P_n,\mathbf{c}_n} = I$$

Konvergencia és korlátosság

Tétel

Minden konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás

Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Ekkor pl. az $(A-1, A+1)$-en kívül csak véges sok tagja van a sorozatnak. Ha K a kimaradó tagok abszolút értékének, $|A+1|$-nek és $|A-1|$-nek a maximuma, akkor $|a_n| \leq K$ minden n-re.

Megjegyzés

Az állítás megfordítása nyilván nem igaz, pl. az $1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$ sorozat korlátos, de nem korvergens: bármely $c \in \mathbb{R}$-re 1 vagy 2 nincs benne a $(c-\frac{1}{2}, c+\frac{1}{2})$ intervallumban, és ez végtelen sok indexű kimaradó tagot jelent.

Tétel

Minden monoton és korlátos sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy az $[a_n]$ sorozat monoton, és legyen $|a_n| \le K \quad \forall n$.
Felezgessük a $[-K, K]$ intervallumot mindig az intervallum első vagy második zárt felét választva, úgy, hogy a kiválasztott fél intervallumban mindig végtelen sok (indexű) tagja legyen a sorozatnak:
$I_0 = [-K, K] \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$. Ugyanúgy, mint a Bolzano-tétel bizonyításában, $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} I_i = \{c\}$ a Cantor-axióma és az intervallumok 0-hoz tartó hossza miatt. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c,$$

ugyanis $\forall \varepsilon > 0\ \exists i$: $I_i \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon) =: I$. Így I tartalmaz végtelen sok tagot: $a_{n_0}, a_{n_1}, \ldots$ valamely $n_0 < n_1 < \cdots$-ra. $\forall n \ge n_0$-ra $\exists n_j$:
$n_0 \le n \le n_j$, és a monotonitás miatt $a_{n_0}, a_{n_j} \in I \ \Rightarrow a_n \in I$.
Tehát c valóban limesze a sorozatnak.

Megjegyzés

Az előbbi tétel nyilván akkor is igaz, ha a korlátos sorozat csak az N-edik tagjától kezdve monoton valamely $N \in \mathbb{N}$-re.

Példa

$c > 0$-ra definiáljuk rekurzívan a következő sorozatot: $a_0 > 0$ tetszőleges, és $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{c}$.

Bizonyítás

$a_n > 0\ \forall n$, és belátjuk, hogy a sorozat a_1-től kezdve monoton fogyóan tart $\sqrt{c}$-hez.

Bizonyítás (folytatás)

$$a_{n+1} \geq \sqrt{c}\ \forall n \geq 0 \quad\quad a_n \geq a_{n+1}\ \forall n \geq 1$$

$$\Updownarrow \quad\quad \Updownarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \geq \sqrt{c} \quad\quad a_n \geq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$$

$$\Updownarrow \quad\quad \Updownarrow$$

$$a_n^2 - 2\sqrt{c}a_n + c \geq 0 \quad\quad a_n \geq \frac{c}{a_n}$$

$$\Updownarrow \quad\quad \Updownarrow$$

$$(a_n - \sqrt{c})^2 \geq 0 \quad\quad a_n \geq \sqrt{c}$$

Tehát a sorozat $n = 1$-től kezdve monoton, és korlátos is $(0 < a_n \leq a_1\ \forall n \geq 1)$, így konvergens. Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

$a_n \geq \sqrt{c}\ (n \geq 1) \ \Rightarrow\ A \geq \sqrt{c} > 0$, és

$$A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(A + \frac{c}{A}\right) \ \Rightarrow$$

$$A^2 - c = 0 \ \Rightarrow\ A = \sqrt{c}.$$

Pl. $c = 2$, $a_0 = 1$-re a sorozat eleje $1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408} \approx 1.4142156\ldots$, és $\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$.

Definíció

Egy $[a_n]$ sorozat részsorozata egy $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}$ végtelen sorozat, ahol $n_1 < n_2 < \cdots$.

A definíciókból közvetlenül adódik:

Állítás

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, és $[a_{n_k}]$ egy részsorozata $[a_n]$-nek, akkor $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$.

Példa

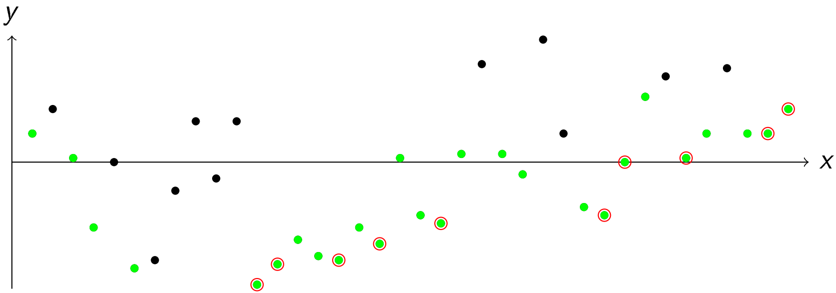
Az $[a_n]_{n\in\mathbb{N}^+} : 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$ divergens sorozatnak részsorozata az $[a_{2k}] : 2, 2, 2, \ldots$ konvergens sorozat.

Tétel

Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

Bizonyítás

Ha nincs monoton fogyó részsorozat, akkor $\forall$ véges monoton fogyó részsorozat véget ér (azaz $a_{n_1} \geq \ldots \geq a_{n_k}$-hoz nincs $n_{k+1} > n_k$, hogy $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$. De akkor a végtelen sok ilyen "utolsó tag" szigorúan monoton növő részsorozatot alkot.



Tétel (Bolzano–Weierstrass)

Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás

Az előbbi tétel szerint van monoton részsorozata, ami nyilván korlátos, így konvergens is.

A Bolzano–Weierstrass-tétel segítségével be lehet bizonyítani a korábban tanult, folytonos függvények szélsőértékéről szóló Weierstrass-tételt.

Tétel (Weierstrass-tétel)

Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor ott felveszi a maximumát és a minimumát.

Bizonyítás (vázlat)

- f korlátos, különben $\exists [x_n]$ sorozat $[a, b]$-ben, hogy $f(x_n) > n \ \forall n$, vagy $[y_n]$, hogy $f(y_n) < -n \ \forall n$.
  Pl. az első esetben $[x_n]$-nek van konvergens $[x_{n_k}] \to c \in [a, b]$ részsorozata, és erre $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty \neq f(c)$. ↯
- Intervallumfelezéssel beláthatjuk, hogy f-nek van egy M legkisebb felső és egy m legnagyobb alsó korlátja.
- Van olyan $[x_n]$ sorozat, amire $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$, és x_n-nek egy konvergens $[x_{n_k}] \to c$ részsorozatára f folytonossága miatt $f(c) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$. Mivel M felső korlátja f-nek $[a, b]$-n, M az f maximuma. Ugyanígy m a minimuma.

Cauchy-féle konvergenciakritérium

Tétel

Egy $[a_n]$ valós sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0$, hogy $n, m \geq n_0$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$.