

Vizsgatematika

▶ = kötelező bizonyítás

Minden tételnél fontosak az előadáson elhangzott példák/ellenpéldák!

Bevezetés(logikai formulák és halmazok):

- logikai műveletek és művelet táblái, azonosságok
- ▶ az előadáson elhangzott kétváltozós logikai azonosságok bizonyítása igazságtáblával (implikáció ekvivalens alakja, implikáció tagadása, kontrapozíció, de Morgan azonosságok)
- szükségesség és elégségesség fogalma
- univerzális és egzisztenciális kvantor
- halmazműveletek és tulajdonságaik, azonosságok
- halmazok számossága, végtelen számhalmazok

Példa (Az implikáció ekvivalens alakja)

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

Megoldás

A	\Rightarrow	B	\equiv	\neg	A	\vee	B
0	1	0	✓	1	0	1	0
0	1	1	✓	1	0	1	1
1	0	0	✓	0	1	0	0
1	1	1	✓	0	1	1	1

Példa (Az implikáció tagadása)

$$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

Megoldás

\neg	$(A$	\Rightarrow	$B)$	\equiv	A	\wedge	\neg	B
0	0	1	0	✓	0	0	1	0
0	0	1	1	✓	0	0	0	1
1	1	0	0	✓	1	1	1	0
0	1	1	1	✓	1	0	0	1

Példa (Kontrapozíció)

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$$

Megoldás

A	\Rightarrow	B	\equiv	\neg	B	\Rightarrow	\neg	A
0	1	0	✓	1	0	1	1	0
0	1	1	✓	0	1	1	1	0
1	0	0	✓	1	0	0	0	1
1	1	1	✓	0	1	1	0	1

Példa (de Morgan azonosságok)

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

Megoldás

\neg	$(A$	\wedge	$B)$	\equiv	\neg	A	\vee	\neg	B
1	0	0	0	✓	1	0	1	1	0
1	0	0	1	✓	1	0	1	0	1
1	1	0	0	✓	0	1	1	1	0
0	1	1	1	✓	0	1	0	0	1

\neg	$(A$	\vee	$B)$	\equiv	\neg	A	\wedge	\neg	B
1	0	0	0	✓	1	0	1	1	0
0	0	1	1	✓	1	0	0	0	1
0	1	1	0	✓	0	1	0	1	0
0	1	1	1	✓	0	1	0	0	1

Vektorok:

- vektorok összeadása, skalárral szorzása és ezek műveleti tulajdonságai
- lineáris kombináció fogalma, a sík, illetve tér vektorainak előállítása lineáris kombinációként
- skaláris szorzás és tulajdonságai, hosszúság, szög, háromszög-egyenlőtlenség
- vektor felbontása merőleges összetevőkre
- vektoriális szorzás és tulajdonságai
- vektoriszorzat és tulajdonságai, paralelepipedon térfogata
- vektorműveletek (összeadás, skalárral szorzás, skaláris szorzás, vektoriális szorzás) koordinátás alakban
- ▶ skaláris szorzat koordinátás alakja két dimenzióban
- az n dimenziós tér, lineáris függetlenség fogalma és ekvivalens alakja
- skaláris szorzás, távolság, szög az n dimenziós térben, Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség

Műveletek koordinátás alakban

Tétel

A síkbeli $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, illetve a térbeli $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok skaláris szorzata

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2, \text{ illetve } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Bizonyítás

Síkbeli esetre: $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ és $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}) \\ &= u_1 v_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + u_2 v_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \end{aligned}$$

Analitikus térgeometria:

- egyenes és sík paraméteres és paramétermentes egyenlete
- térelemek kölcsönös helyzete, két egyenes, sík és egyenes, valamint két sík metszetének meghatározása
- térelemek távolsága, pont és egyenes, pont és sík, valamint nem párhuzamos egyenesek távolsága

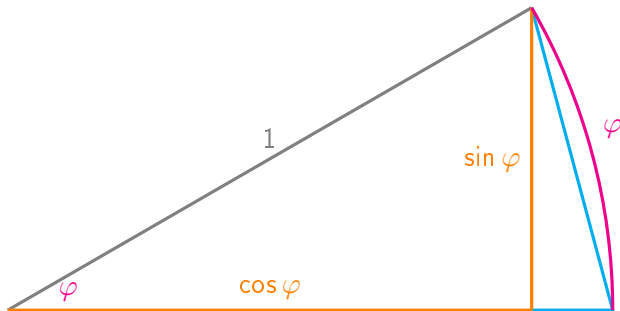
Komplex számok:

- komplex szám algebrai alakja, műveletek algebrai alakban
- komplex szám konjugáltjának és abszolút értékének tulajdonságai
- komplex szám trigonometrikus alakja, műveletek trigonometrikus alakban, hatványozás, gyökvonás, komplex egységgyökök
- algebra alaptétele

Függvények határértéke:

- függvény fogalma, függvény grafikonja
- véges határérték a végtelenben és véges pontban
- végtelen határérték a végtelenben és véges pontban
- határértékek és algebrai műveletek, kibővített aritmetika
- rendőrelv
- ▶ $\sin x$ határértéke a 0-ban
- jobb- és baloldali határérték fogalma
- \sin /x határértéke a 0-ban
- aszimptoták (vízszintes, függőleges, ferde)

Példa (A rendőrelv további alkalmazásai)

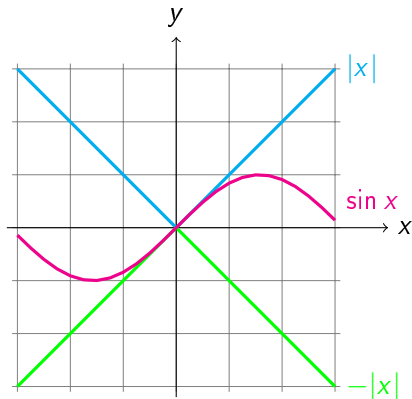


Radiánban írva:

$$|\sin \varphi| \leq |\varphi|$$

$-|\varphi| \leq \sin \varphi \leq |\varphi|$, és $\lim_{\varphi \rightarrow 0} (-|\varphi|) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} (|\varphi|) = 0$, ezért

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin \varphi = 0.$$



Folytonosság:

- pontbeli folytonosság fogalma, műveletek folytonos függvényekkel
- ▶ folytonos függvények kompozíciója folytonos
- szakadási helyek osztályozása
- egyoldali folytonosság fogalma és kapcsolata a pontbeli folytonossággal
- ▶ Bolzano-tétel
- Bolzano-Darboux-tétel, Weierstrass-tétel

Állítás

Ha g folytonos a c pontban, és f folytonos az $g(c)$ pontban, akkor $f \circ g$ folytonos a c pontban. (Jelölés: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.)

Bizonyítás

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

f folyt. $g(c)$ -ben $\implies \exists \delta_1 > 0 [|u - g(c)| < \delta_1 \implies |f(u) - f(g(c))| < \varepsilon]$

g folyt. c -ben $\implies \exists \delta_2 > 0 [|x - c| < \delta_2 \implies |g(x) - g(c)| < \delta_1]$

Ekkor δ_2 megfelelő δ -érték ε -hoz az $f \circ g$ függvény esetében, ugyanis:

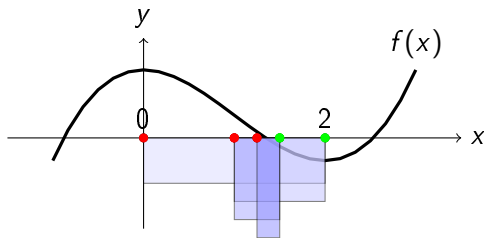
$|x - c| < \delta_2 \implies |g(x) - g(c)| < \delta_1 \implies |f(g(x)) - f(g(c))| < \varepsilon$

Tétel (Bolzano-tétel)

Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon és $f(a)$ és $f(b)$ ellentétes előjelűek ($f(a) \cdot f(b) < 0$), akkor f -nek van zérushelye az intervallum belsejében, vagyis $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.

Bizonyítás

$[a, b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ zárt intervallumok:



I_{n+1} az I_n -nek az a fele, amelyiknek a két végpontján f különböző előjelű (ha f valamelyik osztópontban 0, akkor leállunk)

Bizonyítás (folytatás)

- **Cantor-axióma:** Egymásba skatulyázott nem üres zárt intervallumok metszete nem üres \mathbb{R} -ben.

Legyen $c \in J = I_0 \cap I_1 \cap I_2 \cap \dots$

I_n hossza $\frac{b-a}{2^n}$, ez akármilyen kis $\varepsilon > 0$ -nál kisebb, ha n elég nagy. \implies

$J = \{c\}$.

$f(c) = 0$, mert ha pl. $f(c) = K > 0$ lenne, akkor f folytonossága miatt valamely $\varepsilon > 0$ -ra $\forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap [a, b]$ -re $f(x) \geq \frac{K}{2} > 0$. De valamelyik I_n intervallum beleesik a c -nek ebbe a környezetébe, és annak a végpontjain f pozitív és negatív értéket is felvesz. \nexists

Elemi függvények és inverzeik:

- trigonometrikus függvények tulajdonságai
- polinomok tulajdonságai, polinomok maradékos osztása, gyöktényezők, Horner-módszer
- ▶ racionális gyökteszt
- exponenciális és hiperbolikus függvények tulajdonságai
- ▶ $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
- invertálhatóság és inverz függvény fogalma
- invertálhatóság és monotonitás kapcsolata
- inverz függvény tulajdonságai
- elemi függvények inverze: gyökfüggvények, arkusz függvények, area függvények, logaritmus függvények és tulajdonságaik

Állítás (Racionális gyökteszt)

Legyen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ egy egész együtthatós polinom (vagyis $a_i \in \mathbb{Z}$ minden i -re), és tegyük fel, hogy a $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tovább már nem egyszerűsíthető racionális szám gyöke f -nek. Ekkor p osztója a_0 -nak és q osztója a_n -nek.

Bizonyítás

$(p, q) = 1$ (relatív prímek, nincs közös osztójuk)

$$0 = f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 \quad / \cdot q^n$$

$$0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$$

Bizonyítás (folytatás)

$$0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$$

$$p \mid 0 \text{ és } p \mid a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} \implies p \mid a_0 q^n$$

$$q \mid 0 \text{ és } q \mid a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n \implies q \mid a_n p^n$$

Mivel $(p, q) = 1$, ezért szükségképpen $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.

Állítás (Hiperbolikus azonosságok)

- 1 $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
- 2 $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$
- 3 $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

Bizonyítás (Csak (1)-et)

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Differenciálhatóság

- differenciálhatóság fogalma, deriváltfüggvény, érintő egyenlete
- ▶ folytonosság és differenciálhatóság kapcsolata
- ▶ $\sin x$ függvény deriváltja
- differenciálási szabályok
- ▶ szorzatfüggvény deriváltja
- láncszabály
- inverz függvény deriváltja
- ▶ $\arcsin x$ függvény deriváltja
- Darboux-tétel
- elemi függvények és inverzeik deriváltja

Tétel (Differenciálható függvény folytonos)

Ha f differenciálható c -ben, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) - f(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) = m \cdot 0 = 0,$$

ha m az f differenciálhányadosa c -ben. Így

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Példa

$\sin' x = \cos x$, ugyanis $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(c+h) - \sin(c)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin c \cos h + \cos c \sin h - \sin(c)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos c \sin h - \sin c(1 - \cos h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (\cos c) \frac{\sin h}{h} - (\sin c) \frac{1 - \cos h}{h} = (\cos c) \cdot 1 - (\sin c) \cdot 0 = \cos c,\end{aligned}$$

ugyanis

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos h)(1 + \cos h)}{h(1 + \cos h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 h}{h(1 + \cos h)} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h(1 + \cos h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} (\sin h) \frac{1}{1 + \cos h} = 1 \cdot 0 \cdot 2 = 0$$

Tétel

Legyenek f és g c -ben differenciálható függvények, $a \in \mathbb{R}$ konstans. Ekkor

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}(fg)'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(x) + f(c)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} g(x) + f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right) \\ &= f'(c)g(c) + f(c)g'(c)\end{aligned}$$

Példa

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$

$g(x) = \arcsin x$ az $f(x) = \sin x|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ függvény inverze, és $f'(x) = \cos x$, így

$$(\arcsin x)' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ mert } \cos(\arcsin x) > 0 \text{ a } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\text{-n.}$$

A derivált alkalmazásai:

- lokális és abszolút szélsőérték fogalma, kritikus pontok
- ▶ lokális szélsőérték szükséges feltétele
- ▶ Rolle-tétel
- Lagrange-tétel, Cauchy-tétel
- l'Hospital-szabály
- logaritmus, hatvány és exponenciális függvények nagyságrendje

Tétel

Ha f -nek c -ben lokális szélsőértéke van, és f diffható c -ben $\implies f'(c) = 0$.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy f -nek lokális maximuma van c -ben. Ekkor

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

$\implies f'(c)$ csak 0 lehet. Minimumhelyre a bizonyítás ugyanígy működik.

Tétel (Rolle-tétel)

Ha f folytonos $[a, b]$ -n, diffható (a, b) -n és $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $c \in (a, b)$, hogy $f'(c) = 0$.

Bizonyítás

f folytonos $[a, b]$ -n, ezért van abszolút maximuma és minimuma.

Mivel f diffható (a, b) -n, ezért ezeket értékként

- vagy a végpontokban
- vagy olyan c belső pontban veszi fel, ahol $f'(c) = 0$.

Ha f a minimum és a maximum legalább egyikét (a, b) -ben veszi fel, akkor ott $f'(c) = 0$.

Ha a maximumot és a minimumot is a végpontokban veszi fel, akkor $f(a) = f(b)$ miatt a függvény konstans, így mindenütt 0 a derivált.

Függvényvizsgálat:

- első derivált és monotonitás kapcsolata
- ▶ ha $f' \geq 0$, akkor f monoton növekvő
- első derivált és lokális szélsőértékek kapcsolata
- második derivált és konvexitás kapcsolata
- második derivált és inflexiós pontok kapcsolata
- második derivált és lokális szélsőértékek kapcsolata

Tétel

Legyen f egy valós függvény, mely folytonos $[a, b]$ -n és diffható (a, b) -n.

- $f' \geq 0$ az (a, b) -n pontosan akkor, ha f monoton növekvő $[a, b]$ -n.
- $f' \leq 0$ az (a, b) -n pontosan akkor, ha f monoton csökkenő $[a, b]$ -n.

Bizonyítás (az első állítás \Rightarrow iránya)

Tegyük fel, hogy $f' \geq 0$ az (a, b) -n és legyen $a \leq x_1 < x_2 \leq b$.

Alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt az $[x_1, x_2]$ intervallumra.

\implies Van olyan $c \in (x_1, x_2)$, hogy $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

$x_2 - x_1 > 0$ és $f'(c) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$, azaz f monoton növekvő $[a, b]$ -n.

Határozatlan integrál:

- primitív függvény és határozatlan integrál
- alapintegrálok
- általános integrálási szabályok, fordított láncszabály és speciális esetei, helyettesítéses integrálás, parciális integrálás

Határozott integrál:

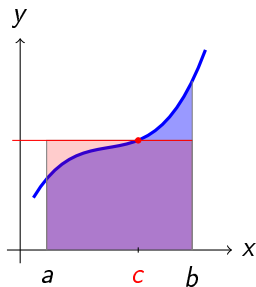
- felosztás, felosztás finomsága, reprezentáns rendszer, integrálközelítő összeg, integrálhatóság
- véges sok pont kivételével folytonos függvény integrálhatósága, véges sok pontban megváltoztatott függvény integrálja
- határozott integrál műveleti tulajdonságai
- integrálegyenlőtlenségek
- ▶ integrál-középértéktétel
- integrálfüggvény fogalma és tulajdonságai
- Newton-Leibniz-tétel
- helyettesítéses integrálás határozott integrálra

Tétel (Integrál-középértéktétel)

Ha f folytonos $[a, b]$ -n $\implies \exists c \in [a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c),$$

azaz f átlaga előáll függvényértékként.



Bizonyítás

f folytonos \implies a Weierstrass-tétel szerint felveszi minimumát (m) és maximumát (M) az $[a, b]$ -n.

Az 1. integrálegyenlőtlenség miatt:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a)$$

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M.$$

m és M is függvényértékek $[a, b]$ -n \implies a Bolzano–Darboux-tétel szerint f közöttük minden értéket fölvesz, így az $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx$ értéket is.

Integrálási technikák:

- racionális törtfüggvény integrálása - polinom + valódi törtfüggvény alakra hozás, nevező faktorizálása
- ▶ valós polinom felbontása első és másodfokú tényezők szorzatára, parciális törtekre bontás, elemi törtfüggvények integrálja
- fordított helyettesítés határozott és határozatlan integrál esetén, speciális helyettesítések: $R(e^x)$, $R(\sqrt[n]{x})$, $R(\sin x, \cos x)$, $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

Tétel

Minden legalább elsőfokú valós polinom felbontható első és másodfokú valós polinomok szorzatára.

Bizonyítás

Legyen $f(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$ ($c_i \in \mathbb{R} \forall i$) valós polinom. Az algebra alaptétele szerint f -nek van gyöke \mathbb{C} -ben:

$$\exists \alpha \in \mathbb{C}, \text{ hogy } f(\alpha) = 0.$$

Ekkor $x - \alpha$ kiemelhető: $f(x) = (x - \alpha)g(x)$.

Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, $g(x)$ is valós polinom, és tovább faktorizálhatjuk.

Bizonyítás (folytatás)

Ha $\alpha = a + bi$ nem valós, akkor

$$0 = f(\alpha) = c_n \alpha^n + \dots + c_1 \alpha + c_0$$

$$\implies f(\bar{\alpha}) = c_n \bar{\alpha}^n + \dots + c_1 \bar{\alpha} + c_0 = \overline{c_n \alpha^n + \dots + c_1 \alpha + c_0} = \overline{f(\alpha)} = \overline{0} = 0,$$

tehát $\bar{\alpha}$ is gyöke f -nek.

De $\bar{\alpha} \neq \alpha \implies g(\bar{\alpha}) = 0 \implies f(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})h(x)$.

Viszont $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = (x - a - bi)(x - a + bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ valós együtthatós, így $h(x)$ is valós. Ekkor egy másodfokú (valós gyök nélküli) valós polinomot emeltünk ki, és $h(x)$ -et tovább faktorizálhatjuk.

Improprius integrál és a határozott integrál alkalmazásai:

- improprius integrál fogalma: integrálás végtelen intervallumon és függőleges aszimptotájú függvény integrálása
- ▶ az $1/x^p$ függvény integrálja az $[1, \infty)$ és $(0, 1]$ intervallumokon
- összehasonlító (minoráns és majoráns) konvergenciakritériumok, általános majoráns kritérium
- területszámítás, függvény grafikonjának ívhossza, forgástest térfogata és felszíne

Az $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ integrál

Ha $p = 1$, akkor:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty, \text{ vagyis ekkor az}$$

integrál nem konvergens.

Ha $p \neq 1$, akkor:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Ha $p < 1$, akkor a fenti határérték ∞ , így az integrál nem konvergens.

Ha $p > 1$, akkor a fenti határérték $-\frac{1}{1-p}$, így az integrál konvergens, és

értéke a határérték, vagyis $\frac{1}{p-1}$.

Az $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ integrál

Ha $p = 1$, akkor:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} [\ln x]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} -\ln c = \infty, \text{ vagyis ekkor az}$$

integrál nem konvergens.

Ha $p \neq 1$, akkor:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 x^{-p} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-p} - \frac{c^{1-p}}{(1-p)}.$$

Ha $p > 1$, akkor a fenti határérték ∞ , így az integrál nem konvergens.

Ha $p < 1$, akkor a fenti határérték $\frac{1}{1-p}$, így az integrál konvergens, és

értéke a határérték, vagyis $\frac{1}{1-p}$.

Sorozatok:

- sorozat fogalma, sorozat jellemzői
- sorozat határértéke és a definíció ekvivalens alakja
- Átviteli elv
- Konvergencia és korlátosság kapcsolata, monoton korlátos sorozatok
- részsorozat fogalma, részsorozat határértéke
- ▶ minden sorozatnak van monoton részsorozata
- Bolzano-Weierstrass-tétel
- Cauchy-féle konvergenciakritérium

Tétel

Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

Bizonyítás

Ha nincs monoton fogyó részsorozat, akkor \forall véges monoton fogyó részsorozat véget ér (azaz $a_{n_1} \geq \dots \geq a_{n_k}$ -hoz nincs $n_{k+1} > n_k$, hogy $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$). De akkor a végtelen sok ilyen “utolsó tag” szigorúan monoton növvő részsorozatot alkot.

