

1. MAT A1 vizsga. 2015-12-22 Neptun: _ _ _ _ _

Név: _____ Előadó: _____

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, definíciókat!

b) Írjuk fel a negyedik komplex egységgyököket! (1 pont)

(a) Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, és tegyük fel, hogy \mathbf{a} és \mathbf{b} szöge φ . Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok vektoriális szorzata, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ az \mathbf{a} vektort, amelynek hossza , iránya és \mathbf{a}, \mathbf{b} és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben (3 pont)

c) Osszuk el maradékosan a $P(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 3x + 1$ polinomot $(x - 2)$ -vel! (2 pont)
hányados:
maradék:

(b) Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van a (a, b) nyílt intervallumon. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$, ha $\forall \varepsilon > 0 \dots \forall x \dots$ (2 pont)

(c) Bolzano-Darboux-tétel: Ha $f \dots$ az $[a, b]$ -n, akkor minden d -hez van olyan $c \in \dots$, amelyre $f(c) = d$. (3 pont)

d) Határozzuk meg az $xe^{1/x}$ függvény ferde aszimptotáját ∞ -ben! (4 pont)

(d) Bolzano-Weierstrass-tétel: Minden sorozatnak van részsorozata. (2 pont)

2. Az alábbi állítások mindegyike hamis. Adjunk rájuk ellenpéldát és javítsuk ki az állítást úgy, hogy igaz legyen!

a) Ha az f függvény invertálható egy I intervallumon, akkor ott szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő. (2 pont)

e) Van-e az $f(x) = x \sin x$ függvénynek lokális szélsőértéke $x = 0$ -ban, és ha igen, akkor milyen? (3 pont)

b) Minden korlátos sorozat konvergens. (2 pont)

3. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Adjuk meg az $\frac{x}{2} = 1 - y = z$ egyenessel párhuzamos, az origón és az $(1, 1, 0)$ ponton átmenő sík egyenletét! (3 pont)

f) Végezzünk el az $x = \sin u$ helyettesítést az $\int_0^1 (1 - x^2)^{3/2} dx$ integrálban a határok módosításával együtt! (A helyettesítés után adódó integrált nem kell kiszámolni, csak az integrálandó függvényt egyszerűsíteni!) (3 pont)

4. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Rajzoljuk be, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra melyik tulajdonságból melyik következik! (3 pont)

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan összefüggőek

d) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$ (3 pont)

$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$

$\underline{a}\underline{b}\underline{c} = 0$

b) Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét! (4 pont)

	értelmezési tartomány	értékkészlet
$\arcsin x$		
$\sqrt{\ln x}$		

5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx =$ (5 pont)

6.

a) Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1!$ (2 pont)

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $f' \geq 0$, akkor f monoton növekvő! (Mondjuk ki pontosan az állítást!) (5 pont)

b) $\int \operatorname{arctg}(2x) dx =$ (5 pont)

c) $\int_0^1 \frac{5x^2 + 2}{\sqrt{x}} dx =$ (3 pont)